

Demanda de dinero: una aplicación del filtro de Kalman

Matías Riutort

Introducción

Los principales objetivos de este trabajo se pueden sintetizar en los siguientes puntos:

1) Explicar el proceso dinámico mediante el cual el Filtro de Kalman estima los coeficientes de un modelo,

2) Utilizar la técnica econométrica del Filtro de Kalman para la estimación de modelos con coeficientes supuestamente variables en el tiempo, como una alternativa al Método Clásico de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO), el cual presupone la constancia de dichos coeficientes para el período muestral considerado,

3) Poner en evidencia la superioridad del Filtro de Kalman sobre el Método de Mínimos Cuadrados Ordinarios, mediante el análisis de sus propiedades de optimalidad, utilizando la Razón de von Neumann y el Test Harvey-Collier,

4) Demostrar que los modelos estimados mediante la técnica del Filtro de Kalman suministrarán predicciones mucho más precisas y confiables que aquellos estimados mediante la técnica tradicional de Mínimos Cuadrados Ordinarios. El Filtro de Kalman implica teóricamente un mejoramiento en la capacidad de predicción, sobre todo en ambientes macroeconómicos de relativa inestabilidad y de cambios en las reglas de política económica. Esta capacidad predictiva será contrastada mediante la Raíz de Error Cuadrático Medio, el Error Medio Absoluto y el Coeficiente de Desigualdad de Theil, medidas de uso tradicional.

La técnica del Filtro de Kalman será aplicada a la estimación, para Venezuela, de una función de demanda de dinero. El trabajo está estructurado en cuatro secciones. En la Sección I, se desarrollan los aspectos metodológicos del Filtro de Kalman, tales como la estimación de los coeficientes y las restricciones a priori. La Sección II, está dedicada al análisis de los tests que permiten verificar la optimalidad de Filtro de Kalman. Mientras que en la Sección III, se describen los métodos que permiten cuantificar el grado de exactitud de las proyecciones realizadas mediante las estimaciones del Filtro de Kalman. Por último, en la Sección IV, se emplea la técnica del Filtro de Kalman para estimar los coeficientes de una función de demanda de dinero y realizar proyecciones.

Dados el auge y la profusa utilización que, en los últimos años, ha tenido el Enfoque de Cointegración, considerado uno de los desarrollos recientes más importantes de la econometría moderna, es conveniente hacer algunos señalamientos en su relación con el Filtro de Kalman. Debe recordarse que el contexto natural de los modelos minicuadráticos tradicionales es el de las variables estacionarias y el de los modelos cointegrados. De no cumplirse estas condiciones, las consecuencias son ya bien conocidas. En contraposición, la técnica del Filtro de Kalman está diseñada para trabajar con series no estacionarias, ya que produce distribuciones de las llamadas variables de estado que son condicionales a la realización previa de esas mismas variables. Por esto, la no estacionariedad no constituye un problema en sí para el Filtro de Kalman. Este último tiene, entonces, la ventaja de que no requiere un análisis previo de cointegración entre la demanda por saldos monetarios reales y una medida apropiada del ingreso y de la tasa de interés. El Filtro de Kalman está capacitado para enfrentarse a shocks que permanentemente estén produciendo desplazamientos en la demanda de dinero. Ante situaciones como estas el enfoque de cointegración puede fracasar. Adicionalmente, la formulación latente del modelo de demanda de dinero en que se basa el Filtro de Kalman para llevar a cabo sus estimaciones recursivas, es equivalente a un modelo de corrección de error para la demanda de dinero (ver Bomhoff, 1991). Un buen ejemplo de aplicación del enfoque de cointegración a la demanda de dinero es el trabajo de Karina Páez, publicado en este mismo número de Temas de Coyuntura.

Es oportuno señalar que el presente trabajo forma parte de otro más amplio que incluye, adicionalmente, una aplicación del Filtro de Kalman a la demanda venezolana de importaciones (ver Riutort, 1994).

1. La técnica dinámica del Filtro de Kalman

El Filtro de Kalman es un proceso recursivo para la estimación de los coeficientes β de un modelo, e involucra la participación de un conjunto de matrices y ecuaciones. Estas operan a partir del planteamiento del modelo a estimar en su versión latente, y dadas ciertas condiciones iniciales. Los coeficientes serán estimados y continuamente actualizados mediante las ecuaciones de predicción y actualización, a medida que se dispone de nueva información.

A continuación, se pretende explicar este proceso.

1. Mínimos cuadrados ordinarios y el Filtro de Kalman

Considérese el siguiente modelo

$$y_t = x_t \beta + \varepsilon_t \quad t = 1, 2, 3, \dots, n^1 \quad (1)$$

¹ En el presente trabajo, por tratarse de una aplicación del Filtro de Kalman a series temporales, testará haciendo referencia al tiempo. Pero, evidentemente el Filtro de Kalman puede aplicarse sin ningún problema al caso de datos de corte transversal.

Donde,

- y_t es la t -ésima observación de una variable aleatoria "y"
- x_t es un vector $1 \times k$ de variables explicativas conocidas
- β es un vector $k \times 1$ de coeficientes desconocidos, pero constantes
- ε_t es el término estocástico de error que sigue una distribución normal con media cero y varianza constante, es decir,

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2).$$

Este es el modelo clásico de regresión lineal, utilizado tradicionalmente en la investigación económica. Mediante la conocida técnica de mínimos cuadrados ordinarios se estiman los k coeficientes β para t observaciones, donde $t > k$, de la siguiente forma

$$\beta = (X'X)^{-1}X'Y \quad (2)$$

cuya matriz de varianzas-covarianzas es

$$\text{Cov}(\beta) = \sigma^2(X'X)^{-1} \quad (3)$$

donde, Y representa el vector de las observaciones de la variable dependiente de dimensión $t \times 1$, y X representa la matriz que contiene la información sobre las variables explicativas de dimensión $t \times k$. Es decir, Y y X son las matrices de datos.

De esta forma MCO estima los k parámetros bajo el supuesto que ellos permanecen constantes durante t períodos. Este método puede ser considerado como óptimo, o eficiente, en el sentido de que bajo ciertos supuestos es capaz de obtener estimadores insesgados y de varianza mínima de los coeficientes desconocidos del modelo de regresión lineal clásico. El algoritmo del filtro de Kalman es también considerado un procedimiento óptimo, teniendo la ventaja de que permite la estimación econométrica de coeficientes variables, en contraposición a la técnica estática de los Mínimos Cuadrados Ordinarios.

Sin embargo, en la práctica puede que no se logre la optimalidad si los términos de perturbación ε_t son no esféricos o no cumplen con el supuesto de ortogonalidad en relación a las variables explicativas. También puede suceder que no se cumpla el supuesto de ortogonalidad entre las variables explicativas mismas. Bajo estas circunstancias el problema principal radica en determinar si el grado en que los resultados obtenidos divergen de la optimalidad es significativo o no. Por esta razón, tanto MCO como Filtro de Kalman, deben ser sometidos a un test de optimalidad.

Watson [1983] ha demostrado que el Filtro de Kalman siempre suministrará estimadores óptimos cuando MCO lo hace, y es capaz de hacerlo aunque este último no lo haga. De esta forma Watson demuestra la superioridad del Filtro de Kalman en comparación a MCO.

La formulación del Filtro de Kalman se desarrolla a partir de la versión latente de un modelo (modelo estado-espacio o state-space model en su versión anglosajona), el cual supone la existencia de una ecuación de medición y de una ecuación de transición². Una vez que el modelo se coloca en su versión latente, el Filtro de Kalman provee los medios para actualizar el estado a medida que se dispone de nuevas informaciones. Precisamente, el algoritmo del Filtro de Kalman fué construido para estimar el modelo estado-espacio a través de un proceso iterativo. El estado del sistema está representado por los distintos componentes no observados, en este caso el vector de coeficientes β_t a estimar, al cual se le llama **vector de estado**. Este vector no es directamente observable, pero se sabe que y_t , que sí es observable, es una combinación lineal de los componentes de dicho vector, más, por supuesto, un error de medición ε_t .

2. La versión latente del modelo

Siguiendo a Bohara y Sauer [1992], Watson [1983] y Montenegro [1991], considérese la siguiente reformulación del modelo de regresión lineal clásico, expresada en su versión latente³:

$$y_t = x_t \beta + \varepsilon_t \quad t=1,2,3,\dots,n \text{ (Ecuación de medición)} \quad (4)$$

Donde, ε_t se distribuye normalmente con media cero y varianza conocida $\sigma^2 g_t$, es decir, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2 g_t)$. Además, g_t es un escalar fijo y σ^2 es un escalar positivo que juega el rol de un factor de proporcionalidad⁴. El Filtro de Kalman puede, sin embargo, operar independientemente de σ^2 , pero, éste deberá ser tomado en consideración al momento de testar la optimalidad del Filtro a través del test de Von Neumann, el cual utiliza la varianza de los errores de predicción.

2 Para un desarrollo detallado de la versión latente de un modelo (state-space model) ver Harvey [1989], Cryer [1986], Mills [1990] y Aznar [1978].

3 La formulación del Filtro de Kalman planteada en el presente trabajo, tal como se evidencia de su versión latente, corresponde a aquella aplicada a modelos uniecuacionales. Es, precisamente, esta formulación la que interesa desde el punto de vista de los modelos que se quiere estimar mediante la utilización del Filtro de Kalman. Es importante señalar que es relativamente sencillo hacer la extensión a modelos multiecuacionales, básicamente varía la dimensión de las matrices que intervienen en el algoritmo.

Para un tratamiento más detallado del Filtro de Kalman, así como la especificación de casos más generales, incluyendo aquella para modelos multiecuacionales, ver Harvey [1982], Harvey [1989], Cryer [1986], Sarris [1973], Jazwinsky [1970], Meinhold y Singpurwalla [1983] y Chow [1983].

4 Para una justificación de la conveniencia de plantear la versión latente del modelo permitiendo que la varianza de los errores sea proporcional a un escalar positivo, ver Harvey [1989] pág. 107. Un enfoque similar es adoptado por Watson [1983], Mills [1990] y Labán [1987b].

Aunque el vector de coeficientes β_t no es observable, se supone conocida la forma como evoluciona en el tiempo a través de una ecuación de transición que refleja un proceso markoviano de primer orden (proceso AR(1))⁵.

$$\beta_t = T_t \beta_{t-1} + \phi \delta_t \text{ (Ecuación de transición)} \quad (5)$$

Donde, T_t es una matriz fija diagonal $k \times k$ de coeficientes con T_{t1}, \dots, T_{tk} en la diagonal⁶, ϕ es la matriz identidad $k \times k$, y δ_t es un vector $k \times 1$ de los residuos de la ecuación de transición, los cuales se distribuyen normalmente con media cero y varianza conocida $\sigma^2 Q_t$, es decir, $\delta_t \sim N(0, \sigma^2 Q_t)$ ⁷ fija conocida $k \times k$. La matriz de transición T_t se supone también conocida, mientras los residuos ε_t y δ_t son procesos que no están correlacionados entre ellos, y además, son independientes del vector de estado inicial β_0 (ver Harvey [1989], Watson [1983] y Labán [1987b]).

Las matrices x_t , g_t , T_t , ϕ y Q_t se llaman **matrices del sistema**, y como ya se dijo, se suponen conocidas, de igual forma que el vector de estado inicial β_0 y su matriz de varianza-covarianza.

La adopción de una estructura markoviana de primer orden para la ecuación de transición es una práctica común en la teoría del Filtro de Kalman, sobre todo en su aplicación a la estimación de modelos económicos. Esto, fundamentalmente por dos razones, tal como lo plantea Labán [1987b]: "La selección de dicha estructura se debe a que permite, de una forma relativamente sencilla, combinar dos elementos centrales - la influencia de la estructura pasada y la influencia de los elementos estocásticos - y a que permite un amplio rango de simulaciones sobre ellos. Incluso cabe señalar que la combinación de una matriz de transición T_t igual a la identidad con un vector $\phi \delta_t$ nulo, reduce la técnica de estimación del Filtro de Kalman al método tradicional de MCO. En consecuencia, el supuesto a priori de constancia de los parámetros de un modelo de regresión es simplemente un caso particular del método de Filtro de Kalman".

3. La estimación de los coeficientes β variables (vector de estado)

Para la estimación de los coeficientes β temporalmente variables, el algoritmo del Filtro de Kalman está constituido por un conjunto de ecuaciones de predicción y de actualización, las cuales se deducen a continuación.

Supóngase que Ω_t representa toda la información disponible hasta el período t , la cual está referida, tanto a las matrices del sistema, como a las observaciones y_t , y_{t-1} , y_{t-2}, \dots

⁵ En Harvey [1989] y Sarris [1983] se puede encontrar planteamientos más generales y diferentes estructuras para la ecuación de transición.

⁶ Si la matriz de transición T_t es igual a la matriz identidad, se estará suponiendo que los coeficientes β siguen un proceso de recorrido aleatorio (random walk process).

⁷ La adopción de este supuesto para la varianza de los residuos de la ecuación de transición tiene la misma justificación ya establecida en la Nota de Pie de Página N° 4.

Las ecuaciones de predicción y de actualización permitirán que la estimación del vector de estado sea continuamente actualizada a medida que se tiene disponibilidad de nuevas observaciones.

La derivación de las ecuaciones de predicción y actualización se basa en el supuesto que las perturbaciones (ϵ_t y δ_t) y el vector de estado inicial están normalmente distribuidos⁸. De esta forma es posible calcular recursivamente la distribución de Ω_t condicional a la información disponible Ω_t , para todo el período muestral. Estas distribuciones condicionales son también normales y quedan totalmente determinadas por sus medias y matrices de varianza-covarianza. Es importante resaltar que son precisamente estas últimas magnitudes las que calcula el Filtro de Kalman, y que conforman las ecuaciones de predicción y actualización.

3.1 Las ecuaciones de predicción

De acuerdo a la teoría de la distribución multivariada, la media de la distribución condicional del vector de estado β_t es un estimador óptimo de β_t en el sentido que minimiza el error cuadrático medio (ECM) (Harvey [1989], Granger y Newbold [1986]). Si el estimador de β_t es insesgado, se puede demostrar que su ECM será igual a su varianza⁹. Por lo tanto, minimizar el ECM es equivalente a obtener una varianza mínima. Por esto, la forma de estimar β_t de tal manera que el ECM sea mínimo, es determinando la esperanza matemática de β_t condicionado a la información disponible Ω_t ($E\beta_t|\Omega_t$).

Como lo que se quiere es estimar β_t , pero, lo que se observa es la variable y_t , la cual es una combinación lineal de β_t , entonces se requiere determinar la distribución conjunta de ambas variables. Se sabe, según la teoría de distribuciones, que el vector de estado β_t , tendrá una distribución normal, puesto que, de acuerdo a la ecuación (5), es una combinación lineal de variables aleatorias normales (ver Greene [1993]). Por la misma razón, la variable aleatoria y_t tendrá una distribución normal. Por consiguiente, el vector (β_t, y_t) tendrá una distribución normal conjunta dada la información disponible hasta $t-1$, cuya media y matriz de varianza-covarianza serán, respectivamente, (ver Harvey [1989], Montenegro [1991]):

$$\mu = \begin{bmatrix} E(\beta_t | \Omega_{t-1}) \\ E(y_t | \Omega_{t-1}) \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \text{VAR}(\beta_t | \Omega_{t-1}) & \text{COV}(\beta_t, y_t' | \Omega_{t-1}) \\ \text{COV}(y_t, \beta_t' | \Omega_{t-1}) & \text{VAR}(y_t | \Omega_{t-1}) \end{bmatrix}$$

⁸ De acuerdo a Harvey [1989], cuando el supuesto de normalidad no se cumple, no existe la garantía que el Filtro de Kalman suministre la media condicional del vector de estado. Sin embargo, será un estimador óptimo en el sentido que minimiza el error cuadrático medio dentro de la clase de todos los estimadores lineales.

⁹ Si β_{EST} es un estimador de β , entonces :

$$\text{ECM}(\beta_{EST}) = \text{var}(\beta_{EST}) + (\text{sesgo } \beta_{EST})^2.$$

Si el sesgo es igual a cero entonces:

$$\text{ECM}(\beta_{EST}) = \text{var}(\beta_{EST})$$

Para mayores detalles ver Dutta [1982], Salas [1990] y Novales [1989].

Donde, μ es un vector $(k+1) \times 1$ y Σ es una matriz $(k+1) \times (k+1)$.

Los componentes del vector μ se obtienen aplicando el operador esperanza matemática a las ecuaciones de transición y medición. Por lo tanto,

$$E(\beta_t | \Omega_{t-1}) = T_t E(\beta_{t-1} | \Omega_{t-1}) \quad (6)$$

Esto quiere decir, que dada la información disponible Ω_{t-1} , el estimador óptimo de β_t estará dado por $E(\beta_t | \Omega_{t-1})$.

$$E(y_t | \Omega_{t-1}) = x_t' E(\beta_t | \Omega_{t-1}) \quad (7)$$

La matriz de varianza-covarianza del vector β_t dada Ω_{t-1} , será igual a:¹⁰

$$\text{VAR}(\beta_t | \Omega_{t-1}) = T_t \text{VAR}(\beta_{t-1} | \Omega_{t-1}) T_t' + \phi Q_t \phi' \quad (8)$$

Donde, $\text{VAR}(\beta_t | \Omega_{t-1})$ es una matriz de varianza-covarianza $k \times k$ de los elementos del vector β_t .

De igual forma, y aplicando las mismas propiedades que en la ecuación (8), la varianza de y_t dada Ω_{t-1} , será:

$$\text{VAR}(y_t | \Omega_{t-1}) = x_t' \text{VAR}(\beta_t | \Omega_{t-1}) x_t + g_t \quad (9)$$

Donde, $\text{VAR}(y_t | \Omega_{t-1})$ es un escalar, de igual forma que lo es g_t .

Se obtendrán ahora los componentes de la matriz Σ . La covarianza entre y_t y β_t , dada la información Ω_{t-1} , será:¹²

$$\text{COV}(y_t, \beta_t' | \Omega_{t-1}) = E(y_t, \beta_t' | \Omega_{t-1}) - E(y_t | \Omega_{t-1}) E(\beta_t' | \Omega_{t-1}) \quad (10)$$

Donde, $\text{COV}(y_t, \beta_t' | \Omega_{t-1})$ es un vector $1 \times k$.

Pero, de acuerdo a ecuación (7):

$$\text{COV}(y_t, \beta_t' | \Omega_{t-1}) = E(y_t, \beta_t' | \Omega_{t-1}) - x_t' E(\beta_t | \Omega_{t-1}) E(\beta_t' | \Omega_{t-1}) \quad (11)$$

¹⁰ Recordando que, en el caso multivariado, $\text{VAR}(bx) = b \text{VAR}(x) b'$, de acuerdo con la definición de la forma cuadrática de una matriz. Donde, $\text{VAR}(bx)$ es una matriz de varianza-covarianza, b es una matriz simétrica y x es un vector. En el caso univariado, la varianza de una función lineal de variables aleatorias, $\text{VAR}(a+bx)$, está dada por $b^2 \text{VAR}(x)$. Donde, a , b y x son escalares. (Ver Intriligator [1990], pág. 676, Greene [1993], pág. 38, Cryer [1986], pág. 237).

Además, como β_{t-1} no está correlacionado con δ_t , se aplica la propiedad de las varianzas que establece que la varianza de una suma de variables aleatorias es igual a la suma de las varianzas.

¹¹ Aunque en sentido estricto, de acuerdo con la Nota a Pie de Página N° 4, la varianza de β_t será igual a $\sigma^2 \text{VAR}(\beta_t | \Omega_{t-1})$. Pero, se debe recordar que el Filtro de Kalman puede operar independientemente de σ^2 .

¹² Aplicando una propiedad de la covarianza de dos variables aleatorias, la cual establece que :

$\text{COV}(x,y) = E(xy) - E(x) E(y)$. (Ver Cryer [1986], pág. 23, y Greene [1993], pág. 65).

Esta expresión de la covarianza entre y_t y β_t , se puede simplificar mucho más si se determina a qué es igual $E(\beta_t' \Omega_{t-1})$. Para esto se multiplica la ecuación (4) por β_t' y se aplica el operador esperanza matemática:

$$y_t \beta_t' = x_t \beta_t \beta_t' + \varepsilon_t \beta_t' \quad (12)$$

$$E(y_t \beta_t' \Omega_{t-1}) = E\{(x_t \beta_t \beta_t' + \varepsilon_t \beta_t') \Omega_{t-1}\} \quad (13)$$

$$E(y_t \beta_t' \Omega_{t-1}) = x_t E(\beta_t \beta_t' \Omega_{t-1}), \text{ ya que } E(\varepsilon_t) = 0 \quad (14)$$

$$E(y_t \beta_t' \Omega_{t-1}) = x_t \text{VAR}(\beta_t \Omega_{t-1}) + x_t E(\beta_t \Omega_{t-1}) x_t' E(\beta_t \Omega_{t-1})^{13} \quad (15)$$

Por lo tanto,

$$\text{COV}(y_t, \beta_t' \Omega_{t-1}) = x_t \text{VAR}(\beta_t \Omega_{t-1}) \quad (16)$$

De igual forma se puede demostrar que :

$$\text{COV}(\beta_t, y_t' \Omega_{t-1}) = \text{VAR}(\beta_t \Omega_{t-1}) x_t' \quad (17)$$

Las ecuaciones (6) y (8) son las llamadas ecuaciones de predicción (un período hacia adelante dada Ω_{t-1}), las cuales tienen que ser actualizadas con cada nueva información y_t . La finalidad del algoritmo del Filtro de Kalman es precisamente actualizar las predicciones obtenidas. En otras palabras, se requiere estimar el vector β_t y su matriz de varianza-covarianza $\text{VAR}(\beta_t)$, dada la información disponible hasta el período t , Ω_t .

3.2 Las ecuaciones de actualización

Tal como ya se estableció, el vector de estado β_t y la variable y_t tienen una distribución normal conjunta con media μ y varianza Σ . Pero, interesa conocer la distribución de β_t dadas, conjuntamente, Ω_{t-1} y la nueva información y_t . De acuerdo a Harvey [1989]¹⁴, existe una propiedad de la distribución normal multivariada que establece que si β_t y y_t tienen una distribución normal conjunta, con media y varianza señaladas,

¹³ Teniendo presente la siguiente propiedad de la varianza :

$\text{VAR}(x) = E(xx') - E(x)E(x')$. Por lo tanto, $E(xx') = \text{VAR}(x) + E(x)E(x')$. Donde, x es un vector. (Ver Cryer [1986], pág. 23).

¹⁴ Harvey [1989], pág. 165, establece : si x e y son dos vectores que tienen una distribución normal conjunta con media y matriz de varianza-covarianza dadas por:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix} \text{ y } \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

Entonces, la distribución de x condicional a "y", es también una normal multivariada, cuyas media y matriz de varianza-covarianza son las siguientes :

$$\mu_{x|y} = \mu_x + \Sigma_{xy} [\Sigma_{yy}]^{-1} (y - \mu_y)$$

$$\Sigma_{xx|y} = \Sigma_{xx} + \Sigma_{yx} [\Sigma_{yy}]^{-1} \Sigma_{yx}$$

entonces β_t tendrá también una distribución normal multivariada, dados Ω_{t-1} y y_t , es decir, Ω_t , con media y matriz de varianza-covarianza siguientes:

$$E(\beta_t | \Omega_{t-1}) = E(\beta_t | \Omega_{t-1}) + \text{COV}(\beta_t, y_t' | \Omega_{t-1}) [\text{VAR}(y_t | \Omega_{t-1})]^{-1} [y_t - E(y_t | \Omega_{t-1})] \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}(\beta_t | \Omega_t) &= \text{VAR}(\beta_t | \Omega_{t-1}) - \text{COV}(\beta_t, y_t' | \Omega_{t-1}) [\text{VAR}(y_t | \Omega_{t-1})]^{-1} \\ &\text{COV}(y_t, \beta_t' | \Omega_{t-1}) \end{aligned} \quad (19)$$

De acuerdo a lo obtenido en las ecuaciones (7), (9) y (17), la forma final del estimador de β_t será:

$$E(\beta_t | \Omega_{t-1}) = E(\beta_t | \Omega_{t-1}) + K_t [y_t - x_t E(\beta_t | \Omega_{t-1})] \quad (20)$$

De igual forma, la varianza de la distribución normal de β_t , de acuerdo a los resultados obtenidos en las ecuaciones (9), (16) y (17), será:

$$\text{VAR}(\beta_t | \Omega_{t-1}) = \text{VAR}(\beta_t | \Omega_{t-1}) - K_t x_t \text{VAR}(\beta_t | \Omega_{t-1}) \quad (21)$$

Donde,

$$K_t = \text{VAR}(\beta_t | \Omega_{t-1}) x_t' [V_t]^{-1} \quad (22)$$

$$V_t = x_t \text{VAR}(\beta_t | \Omega_{t-1}) x_t' + g_t \quad (23)$$

Además, al término de la ecuación (20) que multiplica a K_t , llamémosle e_t :

$$e_t = y_t - x_t E(\beta_t | \Omega_{t-1}) \quad (24)$$

Las ecuaciones (20) y (21) son las llamadas **ecuaciones de actualización**.

K_t puede ser considerado como la ganancia del Filtro de Kalman.

e_t es la innovación o error recursivo de predicción, y juega un rol fundamental en la actualización del estimador del vector de estado β_t .

V_t multiplicado por σ^2 es la varianza condicional del error de predicción¹⁵, es decir, $\text{VAR}(e_t) = \sigma^2 V_t$. V_t es importante para verificar la optimalidad del Filtro de Kalman.

Los errores de predicción se supone son independientes y normalmente distribuidos. Por lo tanto, $e_t \sim N(0, \sigma^2 V_t)$.

Adicionalmente, los errores de predicción se suponen no correlacionados, es decir, $E(e_t e_s) = 0$ para t diferente de s y $t, s = 1, \dots, n$.

En resumen, las ecuaciones (6), (8), (20) y (21) constituyen el algoritmo del Filtro de Kalman.

¹⁵ Siguiendo el mismo criterio expresado en Nota a Pie de Página N° 4.

4. El Filtro de Kalman y la función de verosimilitud

Cuando las perturbaciones (ϵ_t y δ_t) y el vector de estado inicial están normalmente distribuidos, el Filtro de Kalman permite que la función de verosimilitud sea calculada a través de la descomposición del error de predicción. Precisamente, la siguiente función de verosimilitud es optimizada (Mills [1990] pág. 216 y Harvey [1989] pág. 126)¹⁶:

$$\text{Log } L = -\frac{1}{2} n \log 2\pi - \frac{1}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \log V_t - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^n \frac{e_t^2}{V_t} \quad (25)$$

Donde, L es la función de verosimilitud o función de densidad conjunta de (y_1, \dots, y_n) condicional a la información Ω_{t-1} , es decir,

$$L(y_1, \dots, y_n | \Omega_0, \dots, \Omega_n) = p(y_1 | \Omega_0) p(y_2 | \Omega_1) \dots p(y_n | \Omega_{n-1}) \quad (26)$$

Donde, $p(y_t | \Omega_{t-1})$ indica la distribución de y_t condicional a la información Ω_{t-1} .

Bajo los supuestos de normalidad, maximizar $\log L$ es equivalente a minimizar la suma al cuadrado de residuos, la cual está contenida en el tercer término de la derecha en la ecuación (25). Efectivamente, la media condicional de y_t ($E(y_t | \Omega_{t-1}) = x_t E(\beta_t | \Omega_{t-1})$) es también el estimador de y_t que minimiza el error cuadrático. Por esta razón, e_t se interpreta como el error de predicción, y la ecuación (25) es conocida como la forma de la función de verosimilitud que descompone el error de predicción. Esto quiere decir, que la densidad conjunta de las observaciones puede ser descompuesta en términos de las innovaciones o errores de predicción (ver Harvey [1989], pág 126).

5. Las condiciones iniciales para que opere el Filtro de Kalman

De las ecuaciones que conforman el algoritmo del Filtro de Kalman, se puede fácilmente deducir que éste es un método recursivo que permite el cálculo de estimadores óptimos (bajo los supuestos necesarios, ya señalados con anterioridad) del vector de estado en el período t , condicional a la información disponible hasta ese período. Además, el Filtro de Kalman permite que el vector de estado sea continuamente actualizado a medida que se dispone de nueva información, lo cual permite a su vez, que el Filtro juegue un papel importante en el suministro de predicciones óptimas.

¹⁶ Para mayores detalles acerca de la función de verosimilitud y el Filtro de Kalman, así como su versión para el caso multivariado, se puede consultar a Harvey [1989], pág. 125, Cryer [1986], pág. 238 y Bohara y Sauer [1992], pág. 397.

Para iniciar el algoritmo se requiere tener conocimiento previo de $\beta_0(E(\beta_0|\Omega_0))$ y de su varianza ($VAR(\beta_0|\Omega_0)$). También se debe asignar valores a las matrices del sistema g_t , T_t , ϕ y Q_t ¹⁷. Dadas las condiciones iniciales, se inicia el proceso recursivo utilizando las ecuaciones de predicción, (6) y (8), para determinar $E(\beta_t|\Omega_{t-1})$ y $VAR(\beta_t|\Omega_{t-1})$, cuando $t=1$. Una vez obtenidos estos valores, las ecuaciones de actualización, (20) y (21), utilizando las innovaciones, e_t , la ganancia del Filtro, K_t , y las varianzas condicionales, V_t , permiten obtener $E(\beta_t|\Omega_t)$ y $VAR(\beta_t|\Omega_t)$, cuando $t=1$. Con estos últimos valores se inicia una segunda iteración, y así sucesivamente, para los n períodos de la muestra. Es decir, el proceso se repite cada vez que se tiene disponible una nueva observación. Se obtendrán, así, n estimaciones recursivas para los k parámetros del vector de estado.

II. Verificando la optimalidad del Filtro de Kalman

El Filtro de Kalman, como método de estimación, se basa en los mismos supuestos que el método de mínimos cuadrados ordinarios. Por lo tanto, es probable que en ciertas oportunidades se aleje del comportamiento óptimo. De aquí, que se hace necesario verificar el grado de divergencia respecto a la optimalidad. En otras palabras, hay que testar si los estimadores de los parámetros del vector de estado son de varianza mínima y si son insesgados o no. Si se puede demostrar que los errores de predicción un período hacia adelante son independientes y no hay errores de especificación funcional, se estará confirmando la optimalidad.

1. La independencia de los errores de predicción: la razón de Von Neumann

Si el Filtro de Kalman es un procedimiento óptimo, entonces los errores de predicción un período hacia adelante, e_t , estarán normal e independientemente distribuidos con media cero y varianza $\sigma^2 V_t$, tal como ya se estableció (ver Watson [1983] y Labán [1987b]). Es decir,

$$e_t \sim N(0, \sigma^2 V_t) \quad \text{para } t = 1, 2, \dots, n \quad (27)$$

De la ecuación (24) podemos escribir que :

$$y_t = x_t E(\beta_t|\Omega_{t-1}) + e_t \quad (28)$$

Dividiendo por $\sqrt{\sigma^2 V_t}$ se obtiene que:

$$\frac{y_t}{\sqrt{\sigma^2 V_t}} = \frac{x_t E(\beta_t|\Omega_{t-1})}{\sqrt{\sigma^2 V_t}} + \frac{e_t}{\sqrt{\sigma^2 V_t}}$$

¹⁷ Diversas formas de estimar las condiciones iniciales necesarias para comenzar el proceso de filtración se pueden consultar en Bohara y Sauer [1992], pág. 396, Harvey [1989], pág. 120, Labán [1987b], pág. 82, Cryer [1986], pág. 239, Watson [1983], pág. 79, Sarris [1973], pág. 506 y Mills [1990], pág. 216.

Entonces,

$$\text{VAR}\left(\frac{e_t}{\sqrt{\sigma^2 V_t}}\right) = E\left(\frac{e_t}{\sqrt{\sigma^2 V_t}}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2 V_t} E(e_t^2) = 1 \quad (30)$$

Por lo tanto, se puede escribir que :

$$w_t = \frac{e_t}{\sqrt{\sigma^2 V_t}} \sim N(0,1) \quad (31)$$

Donde, w_t representan los errores de predicción estandarizados.

Teniendo esto presente, la propiedad de independencia entre los errores de predicción e_t , se puede verificar utilizando la Razón Modificada de Von Neumann (RMVN), definida de la siguiente forma (Ver Watson [1983], Labán [1987b], Johnston [1984])¹⁸:

$$\text{RMVN} = \frac{(n-k) \sum_{t=k+2}^n (w_t - w_{t-1})^2}{(n-k-1) \sum_{t=k+1}^n w_t^2} \quad (32)$$

con $n-k-1$ grados de libertad¹⁹, siendo n el número de observaciones, y k los coeficientes a estimar. Si el valor estimado del test no satisface los valores críticos, entonces no se podrá verificar la propiedad de independencia y el Filtro de Kalman será considerado, en ese caso específico, un procedimiento subóptimo.

La RMVN se puede calcular fácilmente a partir de los resultados obtenidos a través de Filtro de Kalman, ya que V_t y e_t son estimados en las ecuaciones (23) y (24), respectivamente. Sin embargo, es necesario tener una estimación de σ^2 . Esta se puede obtener de la siguiente forma:

¹⁸ La utilización del test de Von Neumann para verificar la ortogonalidad de los residuos, es también sugerida por Harvey [1989], pág. 245.

¹⁹ Los valores críticos del test de Von Neumann para determinados grados de libertad se encuentran tabulados en Johnston [1989], pág. 559. Para cada n existirá un valor crítico inferior, correspondiente a autocorrelación positiva, y un valor crítico superior, correspondiente a autocorrelación negativa. Si el valor estimado de la RMVN cae entre los valores críticos no se podrá rechazar la hipótesis nula de independencia de los errores.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{e_t^2}{V_t}}{n} \quad (33)$$

ya que si

$$\frac{y}{\sqrt{V_t}} = \frac{x_t E(\beta_t | \Omega_{t-1})}{\sqrt{V_t}} + \frac{e_t}{\sqrt{V_t}} \quad (34)$$

entonces,

$$\text{VAR}\left(\frac{e_t}{\sqrt{V_t}}\right) = E\left(\frac{e_t}{\sqrt{V_t}}\right)^2 = E\left(\frac{e_t^2}{V_t}\right) = \frac{1}{V_t} E(e_t^2) = \frac{\sigma^2 V_t}{V_t} = \sigma^2 \quad (35)$$

Es interesante señalar que la Razón de Von Neumann está altamente relacionada con el estadístico Durbin-Watson, desde el punto de vista de la forma de estimación. Sin embargo, presenta dos ventajas sobre este último: 1) Evita las zonas de indecisión relacionadas con el estadístico Durbin-Watson, siendo, por lo tanto, un test exacto, y 2) Es válido en muestras pequeñas, las cuales son características en la investigación económica, mientras que el Durbin-Watson es confiable, pero, para grandes muestras.

2. Inesgamiento de los coeficientes β : El test Harvey-Collier

La otra posible fuente de alejamiento de la optimalidad es la obtención de coeficientes β_t sesgados. Si se parte del supuesto que las variables explicativas de la ecuación de medición cumplen con la propiedad de ortogonalidad en relación a los residuos, entonces, es altamente probable que la fuente de sesgamiento sea una mala especificación funcional de la ecuación. En este caso los errores de predicción pueden estar mostrando una sobre-predicción sistemática o una subpredicción sistemática. Esto, obviamente, ocasiona un sesgo sistemático en los coeficientes estimados.

Harvey y Collier [1977] propusieron un test que permite verificar la significancia del sesgo, basado directamente en la media de los errores de predicción²⁰. Si se parte del supuesto que el Filtro de Kalman es óptimo y que los errores de predicción están normal e independientemente distribuidos con media cero, entonces, el cociente entre la media

²⁰ Ver Watson [1983] y Johnston [1984], pág. 390. Por su parte, Harvey [1989], pág. 237, propone también la utilización del test Harvey-Collier para testar la bondad de la especificación funcional.

El test Harvey-Collier también se utiliza como prueba de estabilidad. Ver Greene [1993], pág. 217.

de los errores de predicción estandarizados y su error estándar estimado, seguirá una distribución t de Student con (n-1) grados de libertad. Es decir,

$$H - C = \frac{\bar{w}}{\hat{\sigma}_w} \sim t(n-1) \quad (36)$$

Donde,

$$\bar{w} = \frac{\sum_{t=k+1}^n w_t}{n-k} \quad (37)$$

$$\hat{\sigma}_w = \sqrt{\frac{\sum_{t=k+1}^n w_t^2}{n-k}} \quad (38)$$

Si se demuestra que H-C no es estadísticamente diferente de cero, entonces se estará verificando la hipótesis nula que establece que los coeficientes β son insesgados. Esto quiere decir que en presencia de estimadores sesgados el H-C tiende a ser cada vez mayor en términos absolutos. Esto es obvio si se piensa en la estimación de una relación lineal entre dos variables, siendo la verdadera relación una potencial²¹.

Por supuesto, si cualquiera de los test propuestos falla en aceptar la hipótesis nula respectiva, esto conducirá al rechazo de la hipótesis de optimalidad.

III. El Filtro de Kalman y la precisión de sus predicciones

Los resultados suministrados por el Filtro de Kalman pueden ser utilizados para medir su capacidad predictiva, y compararla con la de otros métodos de proyección, tales como MCO y Mínimos Cuadrados Ordinarios Recursivos (MCOR)²². Es de gran im-

²¹ El mecanismo por el cual se produce el sesgo en el caso de una mala especificación funcional, es similar al mecanismo por cual se produce el sesgo en los sistemas de ecuaciones simultáneas, al no verificarse el supuesto de ortogonalidad entre las variables explicativas y los residuos de la ecuación. Ver Intriligator [1990], pág. 425.

²² Sobre la técnica de Mínimos Cuadrados Ordinarios Recursivos, y el uso de los Residuos Recursivos, se puede consultar a Greene [1993], pág. 216, Johnston [1984], pág. 384, y Watson [1983].

Se debe recordar que MCOR no es más que un caso especial del Filtro de Kalman. Específicamente, cuando la matriz de transición es igual a la matriz unitaria y la matriz de varianzas-covarianzas de la ecuación de transición es igual a la matriz nula. Por esta razón, al aplicar el método de MCOR los coeficientes varían sólo porque se incorporó una nueva observación y_t , y se da a todas las observaciones la misma ponderación.

portancia contar con un método que suministre predicciones de alta confiabilidad, de tal manera que sirvan de una guía segura, en particular, a aquellos que diseñan la política económica. Esta confiabilidad se debe mantener, incluso en períodos de alta inestabilidad macroeconómica y de cambios importantes en las orientaciones de la política económica. Un método altamente flexible y adaptativo a las nuevas condiciones y que da mayor peso a las observaciones más recientes, como el Filtro de Kalman, debe mantener esa confiabilidad.

Labán [1987b] resume en forma muy acertada las ventajas, que a priori debiera tener el Filtro de Kalman sobre las técnicas tradicionales de predicción:

“En breve, al menos a nivel intuitivo, uno debiera esperar que una técnica dinámica de estimación que relajase el supuesto a priori de constancia de los coeficientes, como es el Filtro de Kalman, entregase predicciones más certeras de la evolución posible de determinadas variables o eventos futuros, que una técnica estática como la de los MCO. Las razones para esto las podemos sintetizar como:

(i) El modelo del Filtro de Kalman permite considerar de mejor forma la característica cambiante del contexto macroeconómico, en términos generales, la cual es incorporada en el proceso de estimación y predicción;

(ii) Permite realizar predicciones relativamente afinadas con un pequeño número de observaciones —al combinar información a priori con las observaciones actuales—, perdiendo importancia la discusión sobre los grados de libertad disponibles, y

(iii) Posibilita la actualización (revisión) de los coeficientes y predicciones al integrarse al set de información una nueva observación. Esta técnica permite descontar, de una forma óptima, el peso que tienen las observaciones pasadas sobre las estimaciones y predicciones actuales.”

Existen varios indicadores posibles que se pueden utilizar para medir la precisión de las predicciones realizadas mediante el Filtro de Kalman²³. Todos ellos utilizan los errores de predicción recursivos calculados mediante el proceso de filtración, los cuales se pueden definir como los errores de predicción ex-post de y_t , cuando sólo se tiene disponible la información Ω_{t-1} (ver ecuación (24)).

1. La raíz del error cuadrático medio y el error medio absoluto

Sea y_t el valor observado de la variable dependiente en el período t (ver ecuación (4) de medición), y y_t^* el valor pronosticado para el mismo período. Es decir,

²³ Ver, por ejemplo, Greene [1993], pág. 197, Intriligator [1990], pág. 583, Salas [1990], pág. 236, Maddala [1985], pág. 361 y Novales [1993], pág. 152.

$$y_t^* = x_t E(\beta_t | \Omega_{t-1}) \quad (39)$$

Por lo tanto, los errores de predicción serán :

$$e_t = y_t - y_t^* \quad (40)$$

La Raíz del Error Cuadrático Medio (RECM) es una medida de la desviación de la variable pronosticada, y_t^* , respecto a su comportamiento observado. Si esta desviación se expresa en términos porcentuales, la RECM se define de la siguiente forma :

$$RECM = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \left(\frac{y_t - y_t^*}{y_t} \right)^2} \quad (41)$$

Donde, m representa el número de períodos que están siendo pronosticados.

Obviamente, en la medida que la RECM sea más cercana a cero las predicciones serán más confiables, puesto que los valores estimados siguen con mayor precisión a los valores observados. La RECM no tiene límite superior.

Por su parte, el Error Medio Absoluto (EMA) se estima de la siguiente forma :

$$EMA = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \frac{|y_t - y_t^*|}{y_t} \quad (42)$$

Obviamente, también, mientras más cercano a cero mayor será precisión de las predicciones.

2. El coeficiente de desigualdad de Theil

Otra medida, bastante utilizada, para evaluar la bondad predictiva del Filtro de Kalman y compararlo con otras técnicas econométricas, es el Coeficiente de Desigualdad de Theil (U), el cual se define como:

$$U_1 = \sqrt{\frac{\frac{1}{m} \sum_{t=1}^m (y_t - y_t^*)^2}{\frac{1}{m} \sum_{t=1}^m y_t^2}} \quad (43)$$

Esta medida está altamente relacionada al coeficiente de determinación R^2 , pero, a diferencia de éste, no está acotada entre cero y uno, ya que $U_1 \geq 0$. Un valor cero para U representa el caso de predicciones perfectas. Mientras que valores altos de este estadístico implican una menor confiabilidad en la predicción.

Una forma alternativa de plantear el Coeficiente de Desigualdad de Theil es en términos de cambios relativos en la variable y_t . En este caso el Coeficiente de Desigualdad para el conjunto de m predicciones será :

$$U_2 = \frac{\sqrt{\frac{1}{m} \sum_{t=1}^m (A_t - F_t)^2}}{\sqrt{\frac{1}{m} \sum_{t=1}^m A_t^2}} \quad (44)$$

Donde, A_t es el cambio porcentual observado y F_t es el cambio porcentual pronosticado.

$$F_t = \frac{y_t^* - y_{t-1}}{y_{t-1}} \quad (45)$$

$$A_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} \quad (46)$$

El numerador de U_2 representa la RECM en la predicción, pero en el caso que la base de comparación fuese Y_{t-1} y no Y_t . Mientras que el denominador representa esta misma RECM, pero, bajo el supuesto que el cambio porcentual pronosticado es cero. Nuevamente, si $U_2=0$ esto implica una predicción perfecta. En cambio, si se tratase de una predicción statu quo, es decir, $F_t=0$, entonces $U_2=1$. En este caso estamos diciendo que los valores proyectados permanecerán iguales a y_{t-1} . De aquí se puede concluir que si $U_2>1$, las predicciones realizadas serán peores que las predicciones statu quo.

IV. Aplicación del Filtro de Kalman: la demanda de dinero

La técnica econométrica del Filtro de Kalman será utilizada, en esta parte del trabajo, para estimar los coeficientes de una función de demanda de dinero con datos de la economía venezolana. Los resultados serán sometidos a un contraste de optimalidad y serán utilizados para realizar predicciones, las cuales serán comparadas con aquellas obtenidas mediante otros métodos econométricos. Hay que recordar que esos otros métodos econométricos parten suponiendo la constancia en el vector de coeficientes, y por lo tanto, circunscriben el análisis econométrico a agentes económicos no racionales, es decir, agentes que no adaptan sus decisiones a la nueva información disponible. Los errores de predicción suministrados por cada método serán utilizados para medir la capacidad predictiva de cada uno de ellos y serán un indicador de la confiabilidad de las predicciones.

De igual forma se verificará si, la función de demanda de dinero presenta problemas de estabilidad estructural, que no son tomados en cuenta por los métodos econométricos tradicionales. Esta verificación se hará mediante la utilización de los residuos generados en la aplicación de MCO, MCOR y Filtro de Kalman. Es importante aclarar aquí que cuando se habla de estabilidad en la función de demanda de dinero, esto no implica que la demanda sea constante. La estabilidad en la función de demanda implica, más bien, que la cantidad deseada de saldos monetarios responda de una forma que se puede predecir de antemano cuando ocurren cambios en las variables explicativas. Dicho de otra forma el vector de estado debe ser estable.

Aquí también conviene hacer una aclaración que creemos importante. El Filtro de Kalman estimará coeficientes variables, es decir, coeficientes diferentes para cada período de la muestra, señalando la variabilidad implícita en el vector de estado. Pero, esta variabilidad puede desarrollarse dentro de ciertos rangos permisibles, de tal manera que los tests de estabilidad no pueden rechazar la hipótesis de homogeneidad. Sin embargo, esta variabilidad puede ser de importancia cuando las estimaciones se utilizan con fines predictivos. Adicionalmente, es posible que los tests de estabilidad basados en los residuos MCO y MCOR, nos lleven a conclusiones diferentes a aquellas obtenidas utilizando los residuos del Filtro de Kalman. Esta diferencia se puede intensificar en la medida que MCO y MCOR no sean procedimientos óptimos, en circunstancias que el Filtro de Kalman esté estimando parámetros eficientes.

Es importante, desde el punto de vista de la política monetaria y de la programación monetaria, contar con un instrumento de alta confiabilidad, que sirva de guía para las metas monetarias, de tal manera que no se produzcan excesos en la oferta de medios de pago, los cuales, a su vez, perjudicarán las metas en relación al proceso inflacionario.

Es sabido que la innovación tecnológica en el área financiera y la mayor apertura de los mercados de capitales, han ocasionado problemas de estabilidad en la función de demanda de dinero, es decir, que la relación entre los saldos monetarios reales y el producto real de la economía, y la relación entre dichos saldos y la tasa de interés, están en un proceso continuo de cambio. Si estos cambios no son tomados en cuenta en la programación financiera, es muy probable que se entre en un proceso, también continuo, de no cumplimiento de las metas monetarias establecidas por el Banco Central. Debe recordarse que los tests tradicionales de estabilidad no están capacitados para captar los cambios continuos que ocurren en el vector de estado. Los métodos econométricos tradicionales de predicción pueden ser efectivos y confiables sólo en situaciones de gran estabilidad de la función de demanda de dinero, caso en el cual se cumpliría el supuesto a priori de constancia en el vector de estado. Es, precisamente, en situaciones de alta inestabilidad donde el procedimiento econométrico del Filtro de Kalman demuestra su superioridad, ya que a través de las ecuaciones de actualización incorpora a la estimación de los parámetros del vector de estado las innovaciones y su inestabilidad implícita. De aquí que la gran capacidad de adaptación del Filtro de Kalman a las situaciones cambiantes del ambiente macroeconómico, y su facilidad para captar y monitorear la

inestabilidad estructural de la función de demanda de dinero, lo pueden convertir en un instrumento altamente confiable, desde el punto de vista de la programación monetaria.

El presente trabajo no tiene por finalidad discutir acerca de las diferentes formas funcionales que pueda adoptar la demanda de dinero, simplemente, se utilizará aquella forma funcional que más comúnmente se ha utilizado en otros trabajos empíricos sobre la materia. Aunque, es conveniente advertir, que de todas maneras, a través del test Harvey-Collier se estará verificando si la forma funcional adoptada es la correcta o no.

El algoritmo del Filtro de Kalman será aplicado a la estimación de los coeficientes, supuestamente variables, de la función de demanda de dinero para la economía venezolana en el período 1983-1992, utilizando información trimestral. Este período ha estado marcado por profundos cambios en la esfera macroeconómica y en la orientación de la política económica, incluida la monetaria. Asimismo, como ya se señaló, han ocurrido cambios tecnológicos importantes en el área financiera y, posiblemente, han ocurrido cambios significativos en las preferencias de los agentes económicos. Además, la política monetaria pasó de una política de control de la tasa de interés a otra de liberalización de la misma. Estos factores producen continuos cambios en los deseos de tenencia de liquidez que dificultan las predicciones necesarias para guiar la política monetaria de oferta de liquidez. Es evidente que los cambios ocurridos durante este período, en especial a partir de 1989, han ocasionado una pérdida importante de autonomía por parte del Banco Central, en el manejo y diseño de la política monetaria. El control sobre la oferta de medios de pago se ha visto afectado por la forma de financiamiento del déficit fiscal y por la norma imperante de política cambiaria. Por lo tanto, es posible que en ciertas oportunidades la autoridad monetaria pierda parte del control que ejerce sobre la oferta de medios de pago, aunque guie su política de oferta de acuerdo a los deseos de tenencia de saldos monetarios por parte del público.

1. El modelo de demanda de dinero

Para la estimación econométrica de la demanda de dinero se ha utilizado una forma funcional mixta, log-lineal y semi-log, que es una de las especificaciones más utilizada en la literatura²⁴, aunque algunos autores utilizan simplemente una relación funcional log-lineal. Adicionalmente, en el modelo planteado no estamos haciendo explícito un mecanismo de ajuste para los desequilibrios de corto plazo en el stock de dinero (mecanismo de ajuste de stocks o de ajuste parcial), tal como sería el caso si la función de demanda de dinero de largo plazo se dedujera a partir de la estimación de una de corto plazo formulada como un modelo autorregresivo. En la formulación adoptada aquí será el vector de estado el que capte los desequilibrios implícitos cuando varían las variables explicativas.

²⁴ Ver, por ejemplo.: Hendry y Ericsson [1991], Labán [1987b], Roley [1985], Mauleón [1989], Lubrano y Otros [1986], Fair [1986], McCallum [1989] y Chow [1966].

De acuerdo a este planteamiento la función de demanda de dinero de largo plazo se puede expresar de la siguiente forma :

$$M_t = AY_t^{\beta_2} B^{i_t} e^{U_t} \quad (47)$$

Donde,

- M_t es el stock deseado de saldos monetarios reales de largo plazo en el período t ,
- Y_t es una variable representativa del ingreso real esperado en el período t ,
- i_t es la tasa de interés esperada en el período t ,
- e es la base de los logaritmos neperianos, y
- U_t representa los términos de error de la ecuación en el período t .

Linealizando la ecuación (47), se obtiene la forma funcional a estimar, que equivale a la ecuación de medición en la terminología del Filtro de Kalman:

$$\text{Ln}M_t = \beta_1 + \beta_2 \text{Ln}Y_t + \beta_3 i_t + U_t \quad (48)$$

Donde,

- $\beta_1 = \text{Ln}A$,
- β_2 representa la elasticidad ingreso de la demanda de dinero, y
- $\beta_3 = \text{Ln}B$ es la semielasticidad interés de la demanda de dinero.

β_1 , β_2 y β_3 conforman el vector de estado²⁵.

Como variable representativa de los saldos monetarios reales deseados (M_t) se utilizó el circulante real, mientras que el Producto Interno Bruto real trimestral se utilizó como una aproximación del ingreso real esperado. Al costo de oportunidad esperado de mantener dinero se lo representó mediante la tasa nominal de interés de los depósitos a plazo pagada por la banca comercial (90 días) (se tomó esta alternativa por razones de disponibilidad estadística).

2. Las condiciones iniciales

Las condiciones iniciales necesarias para comenzar el proceso recursivo de estimación de los coeficientes β , se establecieron de acuerdo a lo sugerido por Watson [1983], Harvey [1989] y Mills [1990]²⁶. En este sentido se adoptaron los siguientes supuestos:

²⁵ En sentido estricto, a los coeficientes β debería llamárseles β_{1t} , β_{2t} y β_{3t} , puesto que se asume serán diferentes para cada período t .

²⁶ Ver Nota a Pie de Página N° 17.

1) $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ para el período 0, es decir, para el cuarto trimestre de 1982. Estos valores se incorporarán en la ecuación (20) de actualización,

2) $\text{Var}(\beta_1) = \text{Var}(\beta_2) = \text{Var}(\beta_3) = \tau$ para el período 0. Donde, τ es un escalar. Se puede demostrar que valores altos de τ hacen que las estimaciones del Filtro de Kalman se acerquen a las estimaciones hechas mediante el método de MCO. Se asumió un valor de $\tau=100$ para el cuarto trimestre de 1982²⁷. Estos valores se incorporarán en la ecuación (21) de actualización,

3) $Q_t = f$. Donde, f es un escalar. Se puede demostrar que valores para f cercanos a cero equivalen a la constancia en los coeficientes. Es decir, los resultados se acercan a aquellos obtenidos por MCO. Esto equivale a suponer un comportamiento irracional de los agentes económicos, los cuales no reaccionarían en forma inmediata ante cambios en las reglas de política económica y/o el entorno macroeconómico. Valores de f más distantes de 0 implican una respuesta más instantánea de los agentes económicos ante cambios en las reglas de política económica, y en especial frente a las normas que se establezcan en la política monetaria. Valores de f distantes de 0 implican, entonces, agentes económicos más racionales. En las estimaciones del presente estudio se utilizaron $f=0.3$ y $f=0.8$, de acuerdo a la misma metodología señalada en Nota de Pie de Página N° 27. En términos más generales, se puede plantear que $Q_t/g_t = f$. Donde f representaría el cociente entre la varianza de los residuos de la ecuación de transición y la varianza de los residuos de la ecuación de medición. Pero, bajo el supuesto de homoscedasticidad, tal como es el presente caso de la demanda de dinero considerada, $g_t = 1$. De tal manera, que establecer un supuesto sobre f equivale a establecer un supuesto sobre la varianza de los residuos de la ecuación de transición. Detalles sobre este planteamiento se encuentran en Labán [1987b] y Sarris [1973].

4) La matriz de coeficientes de la ecuación de transición se supuso igual a la matriz identidad, es decir, $T = I$, por no contarse con evidencia empírica sobre dicha matriz.

3. Evolución de las variables del modelo

La evolución de las variables incorporadas en el modelo de demanda de dinero (Ecuación (47)), se puede ver en los Gráficos 1 al 4. De acuerdo al comportamiento de los saldos monetarios reales, el producto interno y el costo del dinero, el período muestral en estudio se puede dividir en tres sub-períodos: 1983.I-1985.II, 1985.III-1988.IV y 1989.I-1992.IV.

En el primer sub-período se produce un descenso lento, pero, continuo en la tasa de interés, la cual pasa de 15.51% en 1983.I a 10.40% en 1985.II. Los saldos monetarios

²⁷ Se adoptó este valor luego de realizar varias simulaciones que fueron evaluadas a través de los tests de optimalidad y de capacidad predictiva. Valores grandes para τ nos alejan de la optimalidad y disminuye la precisión de las predicciones. Igual sucede con valores inferiores a 100.

reales, aunque con ciertas fluctuaciones debidas a caídas en el producto y al descenso en la tasa de interés, se mantienen en niveles relativamente altos, si los comparamos con los niveles alcanzados en los otros sub-períodos. Tanto es así, que el cociente entre los saldos monetarios reales y producto fluctúa entre 54 y 66%. Sin embargo, es importante resaltar que a partir de 1984.I se inicia un descenso permanente de dicho cociente, el cual continuará hasta 1992.

El período 1985.III-1988.IV se caracteriza por una virtual constancia en la tasa de interés, en niveles relativamente bajos. Por su parte, los saldos monetarios reales, aunque con fluctuaciones, en especial en los tres primeros trimestres de 1987, permanecen en niveles relativamente estables, pero con una disminución continua en relación al producto. Esta relación varía entre 43.9 y 58.6% en este sub-período. El producto, aunque con tasas negativas en algunos trimestres, experimenta un crecimiento importante en el sub-período.

El último sub-período se caracteriza por la existencia de tasas de interés altas y fluctuantes. En 1989.I, y como consecuencia de las medidas del programa de ajuste, se produce una caída importante en los saldos monetarios reales, impulsada por el crecimiento en la tasa de interés y la disminución del producto. Los bajos niveles de saldos monetarios reales se antienen hasta 1991.I. A partir de este momento se empiezan a recuperar, impulsados por el crecimiento del producto, a pesar de la persistencia de las tasas de interés a mantener sus altos niveles. Por su parte, el cociente entre los saldos monetarios reales y el producto fluctúa, en este sub-período, entre 23 y 34.8%.

4. Estabilidad estructural de la demanda de dinero

Las características diferentes de estos tres sub-períodos nos hacen pensar en la posible inestabilidad estructural de la demanda de dinero. Es altamente probable que los coeficientes no permanezcan constantes a lo largo de todo el período muestral considerado. Esto se puede demostrar aplicando el test de Chow o el test de la Variable Dicotómica. En el Cuadro 1 se pueden ver los resultados de la aplicación del test de Chow, a través del cual se compara la estimación para el período completo 1983.I-1992.IV con las estimaciones individuales para cada uno de los sub-períodos considerados. El valor estimado de F supera ampliamente su valor crítico lo cual permite rechazar la hipótesis nula de homogeneidad del modelo. Esto sugiere que los coeficientes no son constantes a través de la muestra. Adicionalmente, en el Cuadro 1 se incluye la aplicación del test de Chow para comparar la estimación para el período 1985.III-1992.IV con los dos sub-períodos más recientes señalados. El valor estimado para F también es superior al valor crítico, con lo cual nuevamente se rechaza la hipótesis nula de estabilidad en el modelo. Esto, evidentemente, invalida la utilización de los resultados obtenidos por MCO para el período muestral completo, al menos, para la realización de predicciones. El problema se plantea cuando a través del test de Chow no se rechaza la hipótesis de homogeneidad, pudiendo existir simultáneamente variabilidad de los coeficientes al interior de un sub-período.

Gráfico 1
Evolución de saldos monetarios reales
(1983.1 - 1992.4)

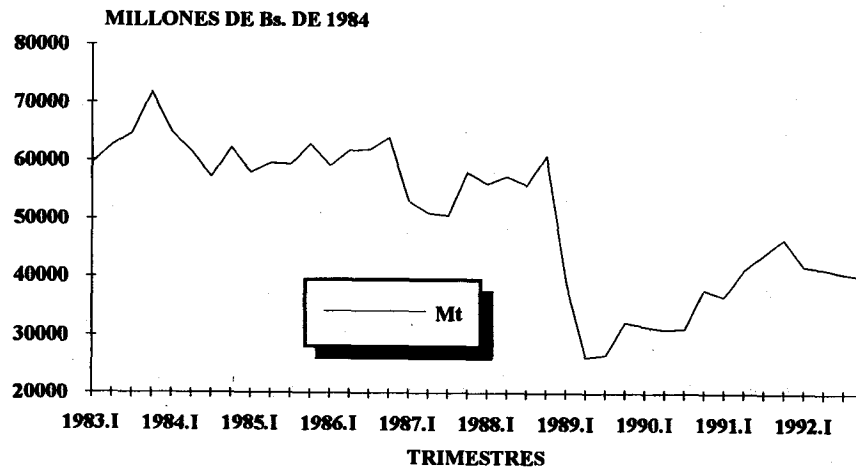
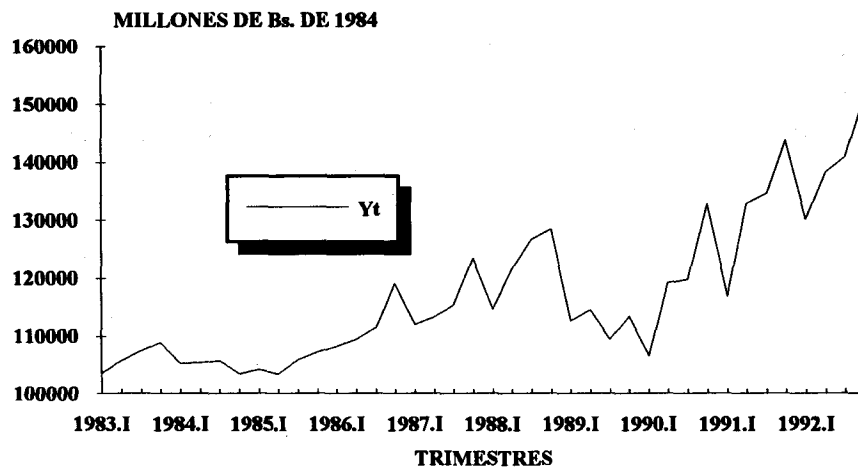
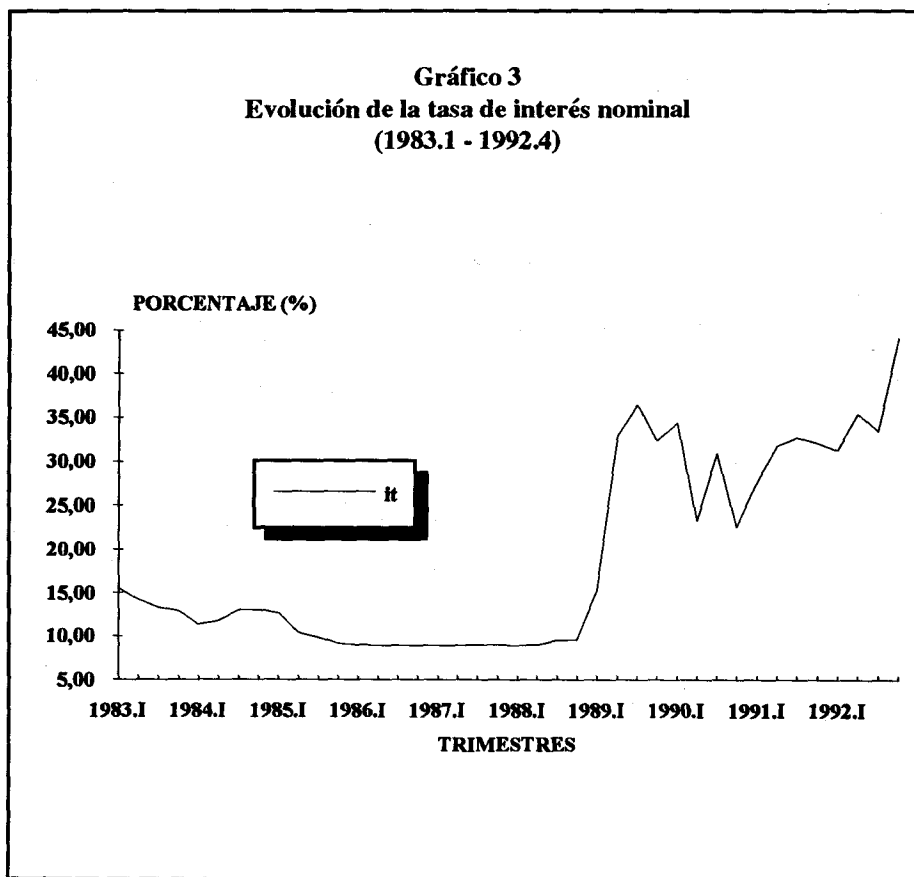


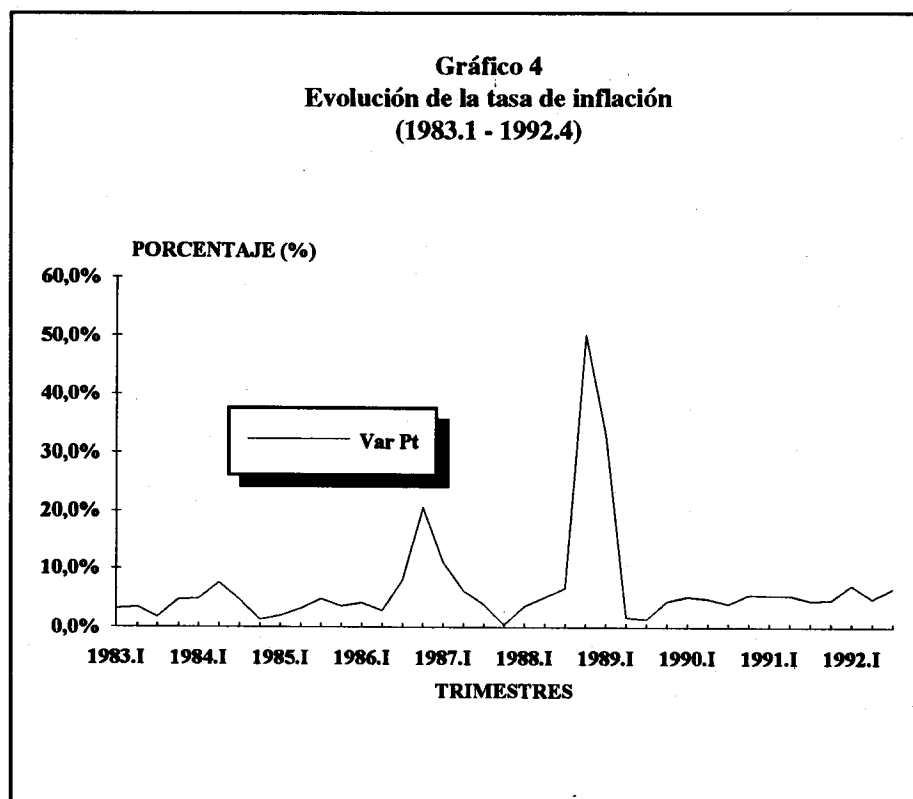
Gráfico 2
Evolución del PIB real
(1983.1 - 1992.4)



El test de Chow no nos permite captar la inestabilidad al interior de cada sub-período. Este tipo de inestabilidad la podemos captar con la utilización de los residuos recursivos o errores de predicción, generados en la aplicación de MCOR (que es un caso especial de Filtro de Kalman) y en la aplicación del algoritmo del Filtro de Kalman que, como ya lo hemos señalado, estima coeficientes variables. Los contrastes CUSUM y CUSUMSQ se basan, precisamente, en los residuos recursivos para verificar la hipótesis nula de estabilidad²⁸.



²⁸ Para detalles sobre los residuos recursivos y los contrastes CUSUM Y CUSUMSQ, ver, por ejemplo, Johnston [1984], pág. 384-92, Novales [1993], pág. 141, y Greene [1993], pág. 216.



Los Gráficos 5 y 6 muestran los resultados de la aplicación del test CUSUMSQ a los residuos recursivos provenientes de MCOR y del Filtro de Kalman, respectivamente. El test para ambos casos sugiere que el modelo no cumple con la hipótesis de homogeneidad en el período considerado, puesto la suma acumulada de residuos recursivos al cuadrado traspasa las bandas críticas establecidas. Sin embargo, se puede ver en los gráficos que la suma acumulada correspondiente a MCOR traspasa una de las bandas críticas para gran parte de la muestra, mientras que aquella correspondiente al Filtro de Kalman sólo la traspasa para algunas observaciones y en otras coincide con una de las bandas. Hay que recordar que estos métodos econométricos suministrarán estimaciones diferentes para los componentes del vector de estado. Además, tal como lo demostraremos en el punto 1.6, el método del Filtro de Kalman es un procedimiento óptimo en la presente estimación de la demanda de dinero, mientras que MCOR es un procedimiento subóptimo (no logra eliminar la autocorrelación serial de los errores). Esta puede ser una advertencia en relación a la utilización de los residuos recursivos de MCOR, y sus correspondientes tests CUSUM y CUSUMSQ, para verificar la inestabilidad estructural, puesto que en algunos casos esta inestabilidad puede ser más bien el reflejo de una estimación subóptima de los coeficientes.

Cuadro 1

Test de estabilidad - Estimación por MCO

$$\text{LnMt} = \beta_1 + \beta_2 \text{LnYt} + B_3 \text{it} + \text{Ut}$$

Período	SRC	Test F de CHOW	F Crítico
1983.1 - 1992.4	0,9605		
1983.1 - 1985.2	0,0187	F(6,31)=16.432	F(6,31,5%)=2.41
1985.3 - 1988.4	0,0693		
1989.1 - 1992.4	0,1418		
1985.3 - 1992.4	0,4878		
1985.3 - 1988.4	0,0693	F(3,24)=10.489	F(3,24,5%)=2.98
1989.1 - 1992.4	0,1418		

- SCR = Suma de residuos al cuadrado

Fuente: Cálculos Propios

Si el test CUSUMSQ indicara para el Filtro de Kalman que la suma acumulada de residuos al cuadrado no traspasa las bandas críticas, esto no quiere decir que los coeficientes no varíen, sino que sus variaciones son menos importantes. Sin embargo, aunque menos importantes, no dejan de serlo desde el punto de vista de la precisión de las predicciones.

5. Los coeficientes estimados

Los coeficientes estimados por los tres métodos econométricos, esto es, Filtro de Kalman ($f=0.3$), Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) y Mínimos Cuadrados Ordinarios Recursivos (MCOR), se pueden ver en el Cuadro 2 y en los Gráficos 7 al 14. En estos, se puede fácilmente constatar la variabilidad de los coeficientes β estimados por el Filtro de Kalman, frente a la forzada constancia de los parámetros estimados por MCO. Los parámetros estimados por Filtro de Kalman son un mejor reflejo de las variaciones que experimentan las elasticidades frente a cambios en el ambiente macroeconómico y en las reglas de política económica, y al mismo tiempo, son un reflejo del comportamiento racional de los agentes económicos que reaccionan ajustando sus decisiones frente a los cambios señalados. Si la autoridad monetaria tuviese en cuenta estos cambios en las elasticidades, las proyecciones de los saldos monetarios serían más confiables, mejorando en principio, la efectividad de la política monetaria.

En el Cuadro 2 y en los Gráficos 7 al 10 se puede, fácilmente ver, que el método de MCO subestima la magnitud de la elasticidad ingreso de la demanda de dinero para todo el período muestral, con respecto a la estimada por Filtro de Kalman. Lo mismo sucede

con la semielasticidad interés, salvo para el período comprendido entre 1989.I y 1990.IV. Por el contrario, MCO sobreestima la magnitud de la constante. Adicionalmente, se puede observar como, tanto la elasticidad ingreso como la semielasticidad interés, cambian para los tres sub-períodos mencionados anteriormente. Las variaciones de estos coeficientes al interior de cada subperíodo se pueden observar en los Gráficos 8 al 10 y 12 al 14. Es importante señalar que, tanto a través del Filtro de Kalman como de MCOR, se obtienen magnitudes positivas para la semielasticidad interés en los trimestres anteriores a 1989.I. Esto puede ser la consecuencia de la constancia que mantuvieron las tasas de interés durante ese período. Por su parte, MCOR subestima la magnitud de la constante hasta 1986.III. A partir de ese momento se produce una sobreestimación de la misma, obteniéndose magnitudes significativamente altas para los años 1989 y 1990. Además, por este método se obtienen elasticidades ingreso negativas para el período 1987.III y 1991.III. En cuanto a la semielasticidad interés el método de MCOR estima magnitudes similares a MCO para el período 1989.I a 1992.IV.

Gráfico 5
Test Cusumsq
Mínimos cuadrados recursivos

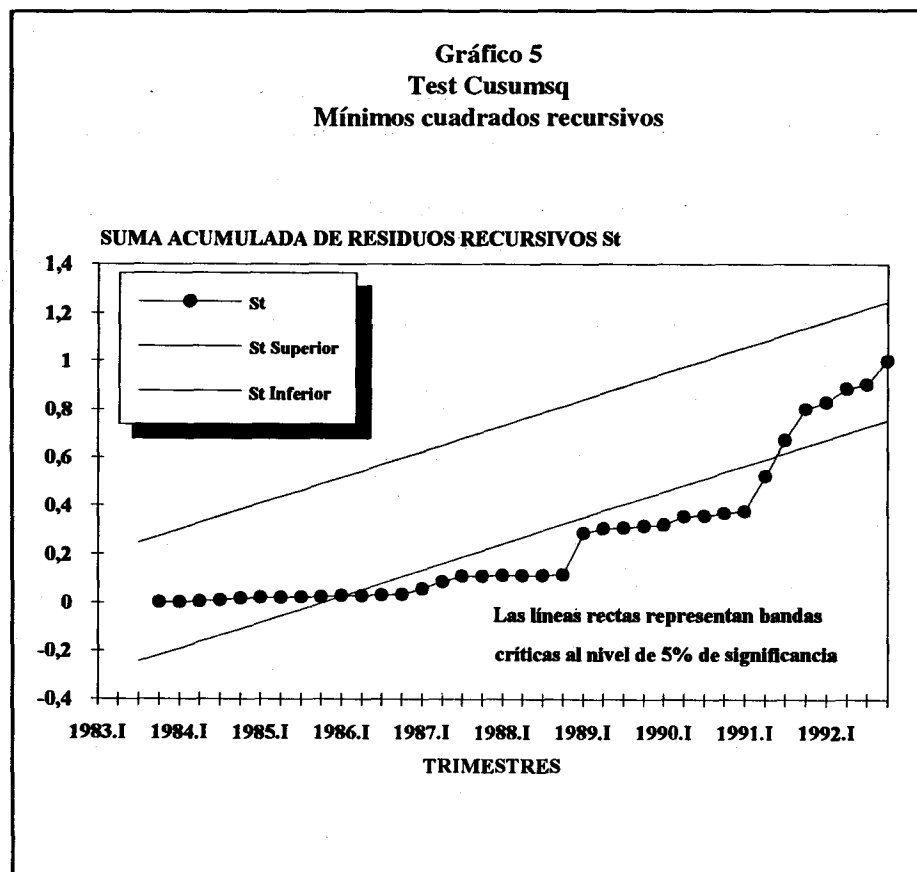
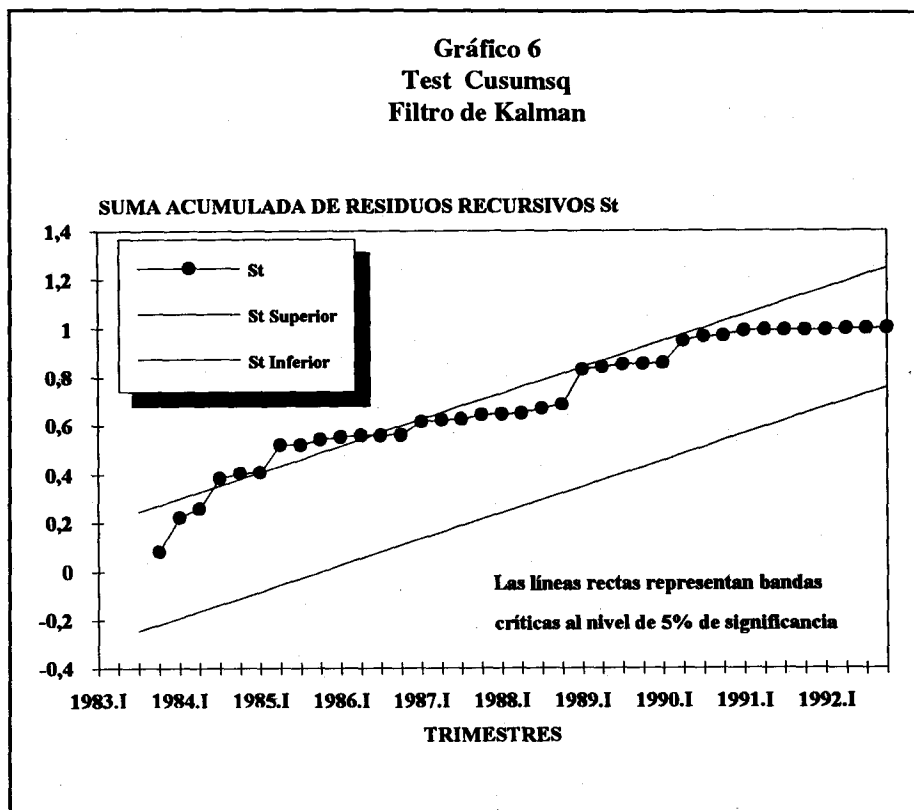


Gráfico 6
Test Cusumsq
Filtro de Kalman



Cuadro 2

Coefficientes estimados de la función de demanda de dinero:
Diferentes métodos econométricos

Trim.	Filtro de Kalman ($f=0.3$)			MCO Recursivos		
	β_1	β_2	β_3	β_1	β_2	β_3
1983.I	0,029	0,339	0,455			
II	0,051	0,592	0,291			
III	0,057	0,670	0,244			
IV	0,059	0,699	0,233	-150,1	13,684	0,200
1984.I	0,068	0,794	0,162	-20,9	2,777	-0,011
II	0,069	0,798	0,147	-25,1	3,129	-0,004
III	0,072	0,832	0,097	-26,8	3,272	-0,003
IV	0,072	0,834	0,102	-17,6	2,486	-0,006

(Continuación Cuadro 2)

Trim.	Filtro de Kalman ($f=0.3$)			MCO Recursivos		
	β_1	β_2	β_3	β_1	β_2	β_3
1985.I	0,072	0,831	0,102	-21,2	2,793	-0,003
II	0,077	0,892	0,059	-21,1	2,787	-0,003
III	0,077	0,893	0,059	-19,8	2,662	0,004
IV	0,078	0,903	0,056	-19,0	2,589	0,005
1986.I	0,078	0,899	0,055	-14,1	2,163	0,010
II	0,078	0,901	0,056	-11,5	1,934	0,011
III	0,078	0,900	0,055	-6,8	1,532	0,011
IV	0,078	0,899	0,054	1,1	0,853	0,009
1987.I	0,076	0,892	0,048	3,8	0,611	0,012
II	0,076	0,890	0,046	7,9	0,255	0,013
III	0,076	0,888	0,045	12,9	-0,176	0,012
IV	0,076	0,893	0,048	12,4	-0,128	0,012
1988.I	0,076	0,894	0,049	12,7	-0,157	0,013
II	0,076	0,893	0,048	12,7	-0,163	0,013
III	0,077	0,893	0,038	13,5	-0,227	0,012
IV	0,077	0,896	0,042	11,9	-0,088	0,014
1989.I	0,079	0,949	-0,036	18,4	-0,632	-0,012
II	0,078	0,941	-0,026	23,0	-1,009	-0,031
III	0,078	0,942	-0,022	23,0	-1,008	-0,031
IV	0,078	0,943	-0,021	22,6	-0,972	-0,030
1990.I	0,078	0,943	-0,018	22,7	-0,982	-0,029
II	0,078	0,925	-0,024	24,3	-1,116	-0,030
III	0,077	0,923	-0,017	23,8	-1,072	-0,030
IV	0,077	0,921	-0,018	22,3	-0,943	-0,030
1991.I	0,078	0,920	-0,011	22,0	-0,924	-0,029
II	0,078	0,920	-0,009	17,8	-0,561	-0,027
III	0,078	0,920	-0,008	14,3	-0,259	-0,026
IV	0,078	0,920	-0,008	10,5	0,063	-0,025
1992.I	0,078	0,920	-0,008	9,8	0,122	-0,024
II	0,078	0,920	-0,009	8,5	0,232	-0,024
III	0,078	0,919	-0,011	7,8	0,296	-0,024
IV	0,077	0,918	-0,010	6,0	0,446	-0,023

Nota : los estimadores MCO son: $\beta_1=6.048$, $\beta_2=0.446$, $\beta_3=-0.0226$.
 - β_1 = Constante de la función de Demanda de Dinero
 - β_2 = Elasticidad ingreso de la Demanda de Dinero
 - β_3 = Semielasticidad interés de la Demanda de Dinero

6. Verificación de la optimalidad

Para verificar si el Filtro de Kalman es un procedimiento óptimo en su aplicación a la estimación de los parámetros variables de la función de demanda de dinero, se estimaron los valores para la Razón Modificada de Von Neumann (RMVN) y para el test Harvey-Collier (H-C). Es decir, se trata de verificar si el Filtro de Kalman suministra estimadores β insesgados y de varianza mínima.

La RMVN (Ecuación (32)) se estimó utilizando los errores de predicción un período hacia adelante (e_t) y la varianza de dichos errores de predicción (V_t), que se obtienen del proceso de filtración. Los valores críticos del test para 36 grados de libertad, son 1,452, como límite inferior, y 2,551, como límite superior. El valor estimado de la RMVN es 2,154, y cae dentro de la región de aceptación de la hipótesis nula de independencia de los errores (Ver Cuadro 3). Por lo tanto, el procedimiento del filtro de Kalman en su aplicación a la estimación de la función de demanda de dinero suministrará estimadores eficientes o de varianza mínima, puesto que se comprueba la independencia de los errores.

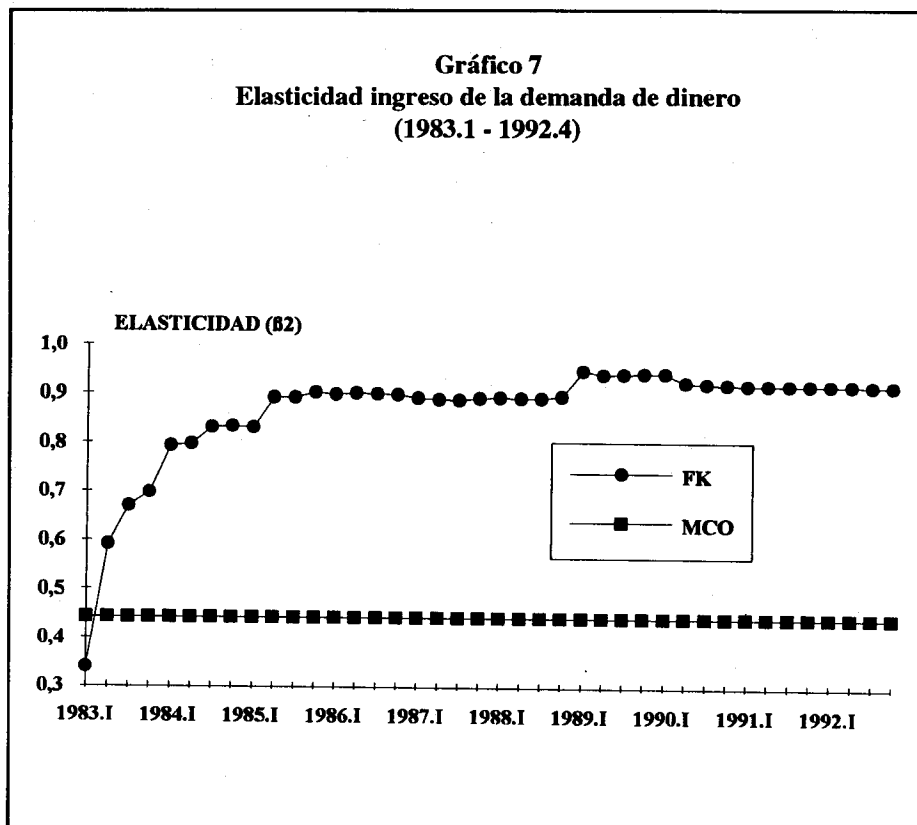


Gráfico 8
Elasticidad ingreso de la demanda de dinero
(1983.1 - 1985.2)

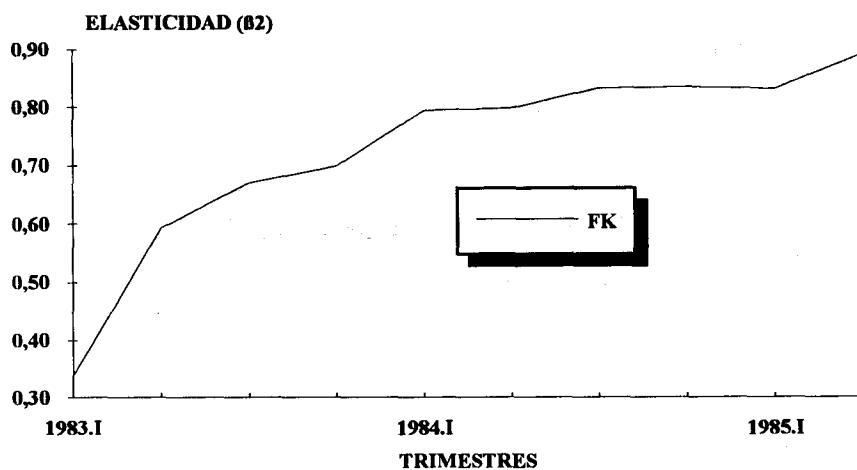
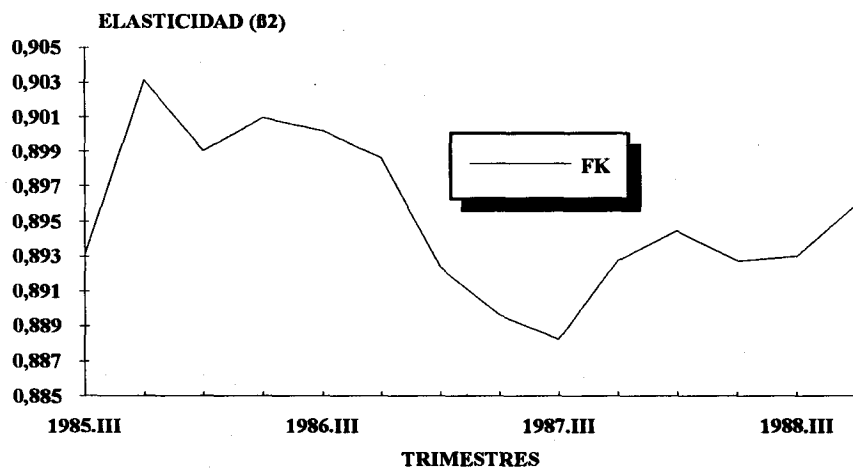
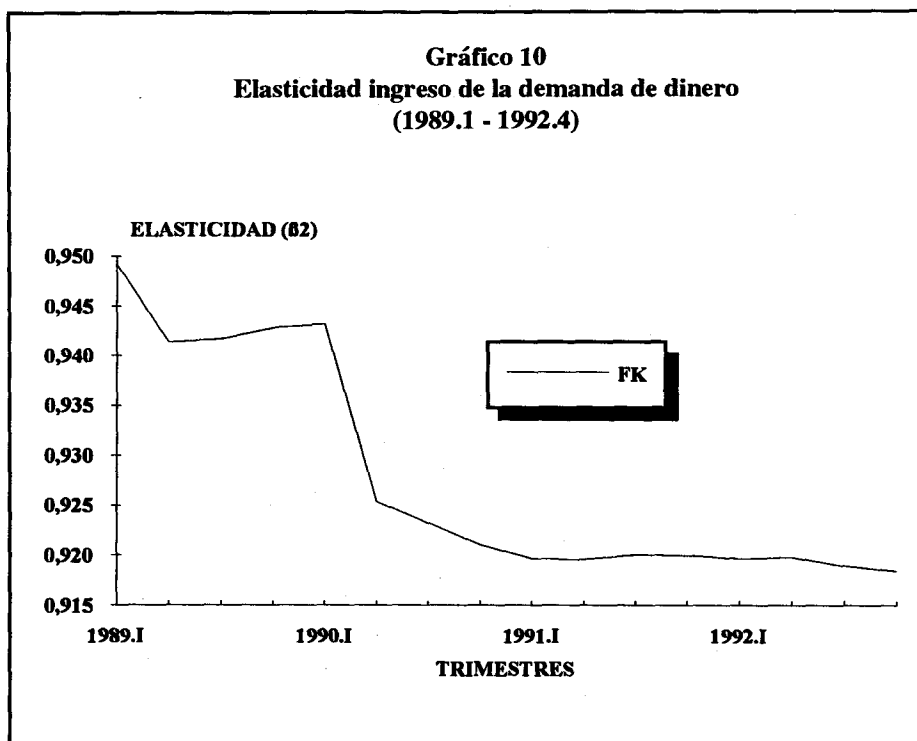


Gráfico 9
Elasticidad ingreso de la demanda de dinero
(1985.3 - 1988.4)





Cuadro 3
Eficiencia e insesgamiento

	Intervalos de confianza del test		
	Valor estimado del test	Límite inferior	Límite superior
FILTRO DE KALMAN:			
Razón Modificada de Von Neumann (1)	2,154	1,452	2,551
Test Harvey - Collier (2)	0,032	-2,036	2,036
MCO RECURSIVOS :			
Razón Modificada de Von Neumann (3)	0,750	1,452	2,551
Test Harvey - Collier (2)	0,147	-2,036	2,036
MCO:			
Estadístico Durbin-Watson (4)	0,439	1,391	1,600
Prueba RESET de Ramsey (5)	4,935	No aplicable	5,285

- (1) Verificación hecha con 36 grados de libertad (40 observaciones menos tres coeficientes a estimar y menos un grado de libertad que se pierde al iniciar el proceso de predicción en el primer trimestre 1984) y $f=0.3$. Eliminando las tres primeras observaciones se hace

comparable con la RMVN para MCOR, el cual pierde tres observaciones en el proceso recursivo, ya que MCO requiere que el número de observaciones sea mayor que el número de parámetros a estimar.

El límite inferior corresponde al test de una cola contra la autocorrelación positiva. Mientras que el límite superior, corresponde al test de una cola contra la autocorrelación negativa. (Ver Johnston [1984]).

- (2) Los límites inferior y superior corresponden a los límites de la zona de aceptación de la hipótesis nula, en una distribución t de Student con 37 grados de libertad y con un nivel de significancia de 5% en un test de dos colas.
- (3) Verificación hecha con 36 grados de libertad.
- (4) Verificación hecha para $n=40$, $k^*=2$ y un nivel de significancia de 5%.
- (5) Verificación hecha con $F(2,35,1\%)$.

Fuente: Cálculos propios.

Gráfico 11
Semielasticidad interés de la demanda de dinero
(1983.1 - 1992.4)

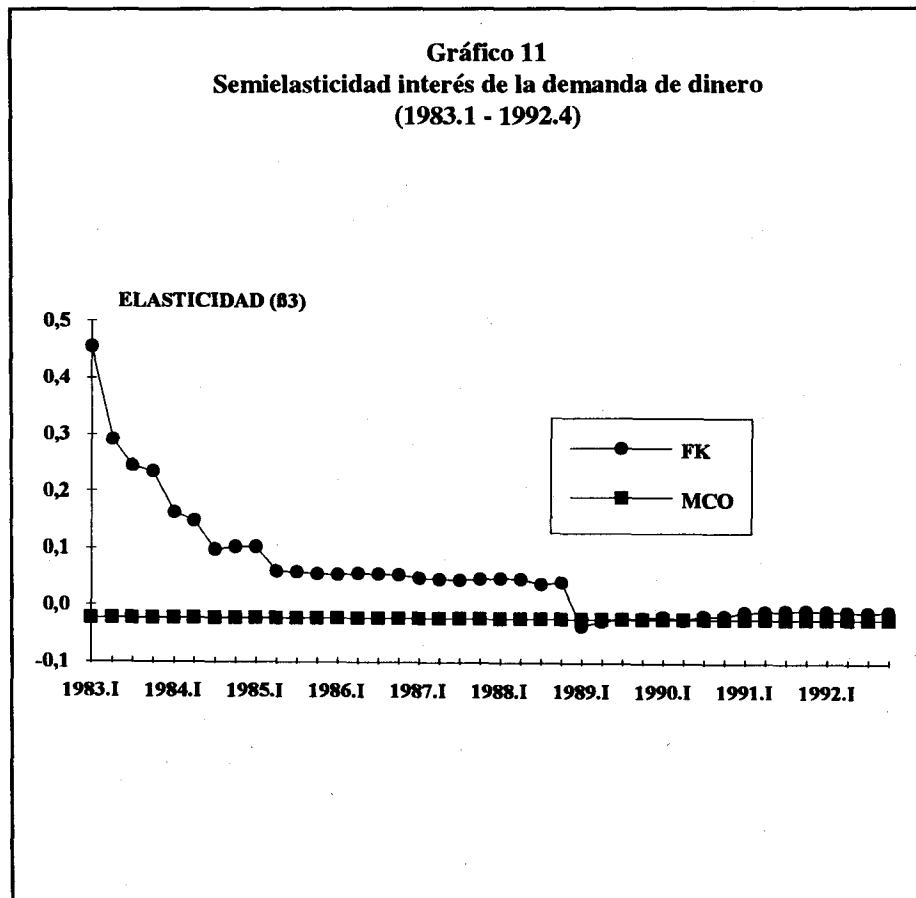


Gráfico 12
Semielasticidad interés de la demanda de dinero
(1983.1 - 1985.2)

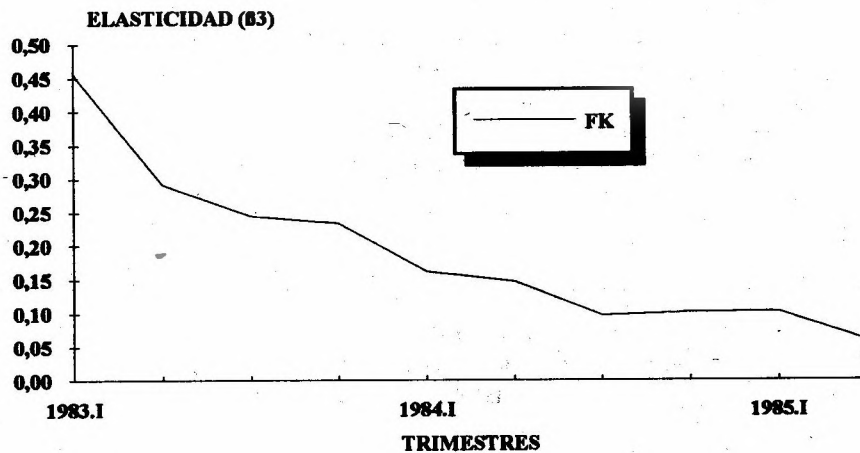
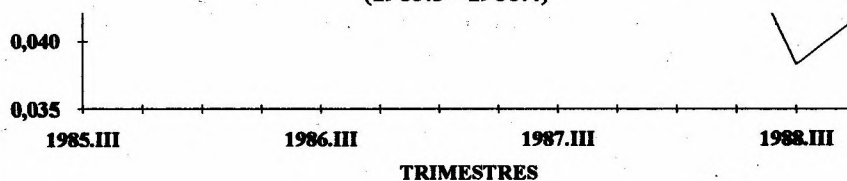
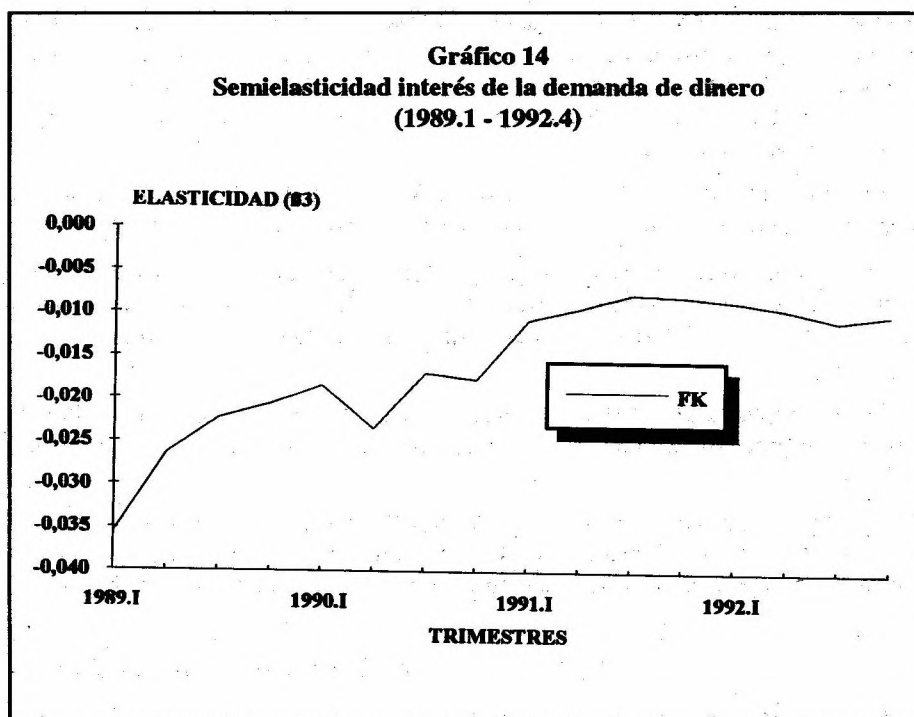


Gráfico 13
Semielasticidad interés de la demanda de dinero
(1985.3 - 1988.4)





No se puede decir lo mismo en relación al método de MCOR. En este caso el valor de RMVN es de 0,750 y cae fuera de la región de aceptación de la hipótesis nula. Por lo tanto, se rechaza la hipótesis de independencia de los errores. El método de MCOR es un procedimiento subóptimo en la estimación de los coeficientes del presente modelo de demanda de dinero. Estos coeficientes no serán de varianza mínima. Tampoco se puede decir lo mismo en relación al procedimiento estático de MCO, aplicado al modelo de demanda de dinero para el período muestral completo. Este presenta evidencia de autocorrelación de primer orden en los errores si nos guiamos por el valor suministrado por el estadístico Durbin-Watson. Este valor es de 0,439. Los límites para el estadístico D-W con un nivel de significancia de 5%, son: 1,391 como límite inferior y 1,600 como límite superior. Por lo tanto el valor estimado para D-W cae en la zona de rechazo de la hipótesis nula y hay, entonces evidencia de autocorrelación positiva.

Estos resultados confirman la hipótesis de que el Filtro de Kalman puede ser un procedimiento óptimo, aún cuando MCO y MCO en su versión recursiva, no lo sean.

El valor para H-C también se calcula en base a los errores de predicción un período hacia adelante (e_t) y la varianza de dichos errores de predicción (V_t), utilizando la Ecuación (36). El valor estimado de H-C cae dentro de la zona de aceptación de la hipótesis nula ($H_0: H-C=0$), que establece que la forma funcional es la correcta, o lo que es lo mismo,