

ARK: <https://n2t.net/ark:/87558/tekhne.28.1.3>

Control de sistemas con incertidumbres paramétricas empleando el análisis de intervalos

Pedro Teppa Garran¹, Carlos Acosta Farkass²

pteppa@unimet.edu.ve¹, carlos.acosta@unimet.edu.ve²

<https://orcid.org/0000-0001-6384-3185>¹

<https://orcid.org/0009-0004-6906-6339>²

Universidad Metropolitana^{1, 2}, Caracas, Venezuela

Resumen

Se propone un método que integra el enfoque algebraico de asignación de polos, el principio del modelo interno y la teoría matemática de análisis de intervalos para diseñar un controlador robusto de orden fijo que garantiza el seguimiento de una entrada de referencia con error de estado estacionario nulo y el rechazo asintótico de señales de perturbación para plantas con incertidumbre paramétrica. El modelo seleccionado para la planta es una función de transferencia intervalo donde se suponen conocidos los extremos de cada intervalo. El diseño se formula a través de un sistema de ecuaciones lineales intervalo cuya solución se efectúa empleando el programa INTLAB resultando en un controlador intervalo. El método se aplica en tres casos de interés práctico como son un proceso de flujo de calor, un sistema de tanques acoplados y un motor de corriente continua de excitación independiente. Las aplicaciones se seleccionaron para considerar diferentes fuentes de incertidumbre y el desempeño alcanzado en cada caso muestra la eficacia del método propuesto.

Palabras clave: Control robusto, Incertidumbres paramétricas, Análisis de intervalos, Seguimiento, Rechazo a perturbaciones, Naciones Unidas ODS 9.

Control of systems with parametric uncertainties using interval analysis

Abstract

A method that combines the algebraic pole-assignment approach, the internal model principle, and the mathematical theory of interval analysis is proposed to design a fixed-order robust controller that guarantees tracking of a reference input with zero steady-state error, and the asymptotic rejection of perturbation signals for plants with parametric uncertainty. The model selected for the plant is an interval transfer function where the extremes of each interval are assumed to be known. The design is formulated through a system of interval linear equations whose solution is carried out using the INTLAB program, obtaining an interval controller. The method is applied in three cases of practical interest, such as a heat flow process, a coupled tank system, and an independently excited direct current motor. The applications were selected to consider different sources of uncertainty and the performance achieved in each case shows the effectiveness of the proposed method.

Keywords: Robust control, Parametric uncertainties, Interval analysis, Tracking, Disturbance rejection, United Nations SDG 9.

Controlo de sistemas con incertezas paramétricas utilizando análisis intervalar

Resumo

Um método que combina a abordagem algébrica de atribuição de pólos, o princípio do modelo interno e a teoria matemática da análise intervalar é proposto para projetar um controlador robusto de ordem fixa que garante o seguimento de uma entrada de referência com erro de estado estacionário zero, e a rejeição assintótica de sinais de perturbação para plantas com incerteza paramétrica. O modelo selecionado para a planta é uma função de transferência de intervalo onde os extremos de cada intervalo são considerados conhecidos. O projeto é formulado através de um sistema de equações lineares intervalares cuja solução é realizada com recurso ao programa INTLAB, obtendo-se um controlador intervalar. O método é aplicado em três casos de interesse prático, como um processo de fluxo de calor, um sistema de tanque acoplado e um motor de corrente contínua com excitação independente. As aplicações foram selecionadas considerando diferentes fontes de incerteza e o desempenho alcançado em cada caso mostra a eficácia do método proposto.

Palavras-chave: Controlo robusto, incertezas paramétricas, análise de intervalo, monitorização de setpoint, rejeição de perturbações, Nações Unidas ODS 9.

I. INTRODUCCIÓN

El problema de asignación de polos permite alcanzar unas especificaciones de desempeño en la respuesta temporal de la salida controlada de un sistema de control mediante la adecuada localización de los polos a lazo cerrado en el plano complejo [1]. Chu [2] distingue cuatro tipos de métodos en la resolución de este problema: los métodos clásicos, los directos, los basados en ecuaciones matriciales y los de autovalores. Los dos últimos son ampliamente utilizados en distintas aplicaciones de control. Los métodos de autovalores se separan en la asignación de polos por realimentación de estado y en la asignación de polos del observador. Como ambos problemas son duales, solo el caso de la realimentación de estado se ha trabajado en detalle [3]. En los métodos matriciales, el problema de asignación de polos se reduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales como es descrito de manera completa en [4, 5, 6]. La formulación a través de un sistema de ecuaciones lineales se aprovecha en este trabajo para resolver el problema de asignación de polos en una región del plano complejo mientras se asegura el seguimiento de una entrada de referencia y el rechazo de una señal de perturbación a través del diseño de un controlador de orden fijo. Una familia incierta de modelos lineales de la planta es empleada para diseñar el controlador. Este modelo incluye parámetros cuyos valores se desconocen, pero están acotados en conjuntos compactos y descritos a través de intervalos cerrados. Específicamente, se usa un modelo función de transferencia intervalo [7].

La asignación de polos para sistemas con incertidumbres paramétricas es un problema de importancia práctica que ha recibido un interés considerable. Objetivos como la atenuación de perturbaciones, la estabilización robusta y la configuración del lazo abierto (*loop shaping*) se suelen expresar como un problema de control robusto de minimización de una norma \mathcal{H}_∞ [8]. En este contexto, se han propuesto distintos métodos para hacer una minimización \mathcal{H}_∞ con restricciones de asignación de polos. Por ejemplo, en [9, 10, 11] se emplea un enfoque de desigualdades matriciales lineales y en [12] el uso del control por modo deslizante. Fuera del marco \mathcal{H}_∞ , la asignación robusta de polos también ha sido tratada empleando los polinomios de Kharitanov [13], el coloreo de polos [14], las redes neuronales [15], el control difuso [16,17], el control PID [18] y el modelado a través de sistemas lineales de parámetros variantes [19]. Todos estos métodos son de una gran sofisticación matemática, la fuente de incertidumbre no siempre es paramétrica y resulta difícil su aplicación general en la resolución de problemas prácticos de control.

En este trabajo, se propone una metodología simple que emplea el enfoque algebraico [4, 5, 6] y el principio del modelo interno [20, 21] para formular los problemas de seguimiento de una entrada de referencia y de rechazo a una señal de perturbación como un sistema de ecuaciones lineales de la forma $Ax = b$, la matriz A corresponde a la planta, el vector x al controlador, y el vector b a las especificaciones de desempeño. Como la planta se supone sujeta a incertidumbres paramétricas, los elementos de la

matriz A son intervalos cerrados con extremos conocidos. Las especificaciones se caracterizan utilizando el principio de garantía de polos dominantes [22], lo que permite definir requerimientos para la salida controlada mediante un sobrepico y un tiempo de establecimiento deseados. La resolución del sistema de ecuaciones lineales para obtener el controlador de orden fijo x se realiza empleando la teoría matemática de intervalos [23, 24]. En [25] pueden apreciarse diversas aplicaciones de esta teoría que incluyen, entre otras, la estimación y la robótica. La metodología propuesta basada en la integración del enfoque algebraico, el principio del modelo interno y el análisis de intervalos; se aplica exitosamente a un experimento de flujo de calor, un sistema de tanques acoplados y un motor de corriente continua. Finalmente, los resultados de este trabajo fomentan la innovación en el control de procesos industriales mediante la incorporación de elementos de robustez en el diseño de controladores y de esta manera contribuir con el ODS 9 de las Naciones Unidas.

Notación: Un intervalo real cerrado se representa como $[a] \triangleq [a^-, a^+]$ donde los extremos a^- y a^+ son cantidades reales conocidas. El centro y el radio del intervalo $[a]$ se calculan como $a_c \triangleq \frac{1}{2}(a^+ + a^-)$ y $a_R \triangleq \frac{1}{2}(a^+ - a^-)$, respectivamente. Por lo tanto, $a^+ = a_c + a_R$ y $a^- = a_c - a_R$. Una matriz intervalo $[A]$ se denota por $[A] \triangleq \{[a_{ij}]\}$, donde $[a_{ij}] = [a_{ij}^-, a_{ij}^+]$ para cada i, j .

II. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE CONTROL

Considere el sistema de control realimentado de la Fig. 1 con funciones de transferencia $P(s)$ y $C(s)$ para la planta y el controlador, respectivamente. La señal $y_r(t): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es la entrada de referencia, $y(t): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es la salida controlada, $u(t): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es la señal de control, $w(t): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es la señal de perturbación y t es la variable independiente de tiempo.

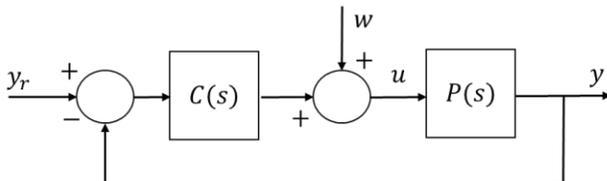


Figura 1. Sistema de control realimentado.

En este trabajo, la planta está sujeta a incertidumbres paramétricas. Por lo que se considera una descripción tipo intervalo de orden n

para describir la función de transferencia. Esto es,

$$P(s) = [N(s)]/[D(s)] \quad (1)$$

Con polinomios numerador y denominador

$$[N(s)] = [b_n]s^n + [b_{n-1}]s^{n-1} + \dots + [b_1]s + [b_0] \quad (2)$$

$$[D(s)] = [a_n]s^n + [a_{n-1}]s^{n-1} + \dots + [a_1]s + [a_0] \quad (3)$$

Donde $[a_i] \triangleq [a_i^-, a_i^+]$, $[b_i] \triangleq [b_i^-, b_i^+]$, $i = 0, 1, \dots, n$ son coeficientes reales tipo intervalo con extremos conocidos y $0 \notin [a_n]$.

La siguiente función de transferencia caracteriza al controlador de orden q

$$C(s) = M(s)/L(s) \quad (4)$$

Donde

$$M(s) = m_q s^q + m_{q-1} s^{q-1} + \dots + m_1 s + m_0$$

$$L(s) = l_q s^q + l_{q-1} s^{q-1} + \dots + l_1 s + l_0, l_q \neq 0$$

son los polinomios convencionales que describen al controlador. Una manera de garantizar condiciones de desempeño para la salida controlada consiste en fijar las posiciones de los polos de la función de transferencia a lazo cerrado del sistema de control de la Fig. 1 [26], dada por

$$\frac{Y(s)}{Y_r(s)} = \frac{N(s)M(s)}{D(s)L(s) + N(s)M(s)}$$

El método de asignación de polos ubica los polos a lazo en posiciones específicas del plano complejo mediante la selección de un polinomio deseado a lazo cerrado $T(s)$ definido como

$$T(s) = t_{n+q} s^{n+q} + t_{n+q-1} s^{n+q-1} + \dots + t_1 s + t_0 \quad (5)$$

Con el objeto de resolver para los polinomios $L(s)$ y $M(s)$ la ecuación polinómica

$$D(s)L(s) + N(s)M(s) = T(s) \quad (6)$$

El objetivo de este trabajo es determinar un controlador que resuelva el siguiente problema.

Problema 1: Para el sistema de control de la Fig. 1 considere que se conoce la función de transferencia de la planta (1) y un polinomio deseado a lazo cerrado (5). Determine los polinomios del controlador (4) que resuelven la ecuación polinómica (6) de manera que la salida controlada $y(t)$ siga la señal de referencia $y_r(t)$ y rechace a la

señal de perturbación $w(t)$ cuando los coeficientes de los polinomios numerador y denominador de la planta (1) varían en el interior de los intervalos (2) y (3).

III. PRELIMINARES

Momentáneamente se considera que los polinomios $N(s)$ y $D(s)$ en (2) y (3) son polinomios convencionales, esto es, no están sujetos a incertidumbres paramétricas. En lugar de resolver directamente la ecuación polinómica (6) para determinar los polinomios $M(s)$ y $L(s)$ en (4), conocidos los polinomios $N(s), D(s)$ y $T(s)$, es posible, al igualar coeficientes en los polinomios resultantes a ambos lados de la ecuación (6), resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_n l_q + b_n m_q &= t_{n+q} \\ a_n l_{q-1} + a_{n-1} l_q + b_n m_{q-1} + b_{n-1} m_q \\ &= t_{n+q-1} \\ &\vdots \\ a_0 l_0 + b_0 m_0 &= t_0 \end{aligned} \quad (7)$$

La ecuación (7) se expresa en forma compacta como

$$Ax = b \quad (8)$$

El vector x corresponde a los coeficientes de los polinomios $M(s)$ y $L(s)$ en (4), definido a través de

$$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r]^T = \left[\begin{array}{ccc} l_q & \dots & l_0 \\ m_q & \dots & m_0 \end{array} \right]_{\substack{L(s) \\ M(s)}}^T \quad (9)$$

Con $r = 2q + 2$ y el vector b se forma con los coeficientes del polinomio deseado a lazo cerrado $T(s)$ en (5) haciendo

$$\begin{aligned} b &= [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_v]^T \\ &= [t_{n+q} \ t_{n+q-1} \ \dots \ t_0]^T \end{aligned} \quad (10)$$

Con $v = n + q + 1$. La matriz $A \in \mathbb{R}^{v \times r}$ es una matriz de Sylvester, esto es, una matriz por bandas dependiente de los coeficientes de los polinomios $N(s)$ y $D(s)$, definidos en (2), (3) y está dada por

$$\begin{bmatrix} a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & a_n & 0 & \dots & 0 & \vdots & b_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_1 & \vdots & \ddots & \ddots & a_n & b_1 & \vdots & \ddots & \ddots & b_n \\ a_0 & a_1 & \ddots & \ddots & \vdots & b_0 & b_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & b_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_1 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Teorema 1: Dada la matriz A (11) formada por los coeficientes de los polinomios $N(s)$ y $D(s)$ en (2) y (3), respectivamente. Los polinomios $N(s)$ y $D(s)$ son coprimos (no tienen factores comunes) si y solo si, el determinante de la matriz A es distinto de cero.

Prueba: Se va a probar solamente necesidad, para el caso de suficiencia basta con revertir los argumentos. Se asume que los polinomios $N(s)$ y $D(s)$ en (2) y (3) no son coprimos. Esto es, existe una raíz común z , tal que

$$\begin{aligned} N(s) &= (s - z)(\tilde{b}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \tilde{b}_0) \\ D(s) &= (s - z)(\tilde{a}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \tilde{a}_0) \end{aligned}$$

Al eliminar el factor $(s - z)$ resulta

$$D(s)(\tilde{b}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \tilde{b}_0) - N(s)(\tilde{a}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \tilde{a}_0) = 0$$

Igualando coeficientes a ambos lados de la ecuación anterior se obtiene

$$A\pi = 0 \quad (12)$$

Donde

$$\pi = [\tilde{b}_{n-1} \ \dots \ \tilde{b}_0 \ -\tilde{a}_{n-1} \ \dots \ -\tilde{a}_0]^T$$

y la matriz A puede verificarse que tiene la forma de (11). Es conocido que el sistema de ecuaciones (12) posee una solución no trivial si el determinante de la matriz A es igual a cero y de esta forma queda establecido el teorema.

El Teorema 1 es la base para asegurar que la asignación de polos es posible siempre y cuando se garanticen ciertas condiciones de grado para los polinomios involucrados (M, L y T). Esto se trata en el resultado siguiente.

Teorema 2: Considere el sistema de control de la Fig. 1, donde los polinomios de la planta $N(s)$ y $D(s)$ se asume que son coprimos. Sea $T(s)$ en (5) un polinomio arbitrario de grado $2n - 1$. Entonces, existen polinomios $M(s)$ y $L(s)$ en (4), ambos de grado $n - 1$ soluciones de la ecuación (6).

Prueba: Al igualar coeficientes en (6) resulta el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \Gamma [l_{n-1} \ \dots \ l_0 \ m_{n-1} \ \dots \ m_0]^T \\ = [t_{2n-1} \ \dots \ \dots \ \dots \ t_0]^T \end{aligned}$$

Es sencillo comprobar que $\Gamma = A$ y como consecuencia del teorema 1, la matriz A es invertible si y solo si los polinomios $N(s)$ y $D(s)$ son coprimos. Por lo que queda establecido el teorema.

Comentario 1: No hay pérdida de generalidad si los polinomios $D(s)$, $L(s)$, y $T(s)$ se seleccionan como mónicos [6].

En lo que sigue, se va a modificar el problema de asignación de polos para incorporar los problemas de seguimiento de la señal de referencia $y_r(t)$ y el rechazo de la perturbación $w(t)$. En la Fig. 1, las transformadas de Laplace de las señales $y_r(t)$ y $w(t)$ vienen dadas por las funciones racionales

$$Y_r(s) = A_r(s)/B_r(s), W(s) = A_w(s)/B_w(s) \quad (13)$$

Estas señales se asumen que son persistentes, lo que significa que no tienden a cero cuando el tiempo lo hace hacia infinito. Por lo que los polinomios denominadores de $Y_r(s)$ y $W(s)$ pueden expresarse como

$$B_r(s) = Y_r^-(s)Y_r^+(s), B_w(s) = Y_w^-(s)Y_w^+(s) \quad (14)$$

Los polinomios $Y_r^-(s)$ y $Y_w^-(s)$ tienen sus raíces en el semiplano complejo izquierdo (SPI). Mientras que las raíces de los polinomios $Y_r^+(s)$ y $Y_w^+(s)$ se localizan en el semiplano complejo derecho (SPD). El principio del modelo interno [20, 21] establece que el modelo del controlador debe replicar los polos inestables de las señales persistentes que se desean seguir o rechazar. Por esta razón, el modelo del controlador (4) se modifica de la manera siguiente:

$$C(s) = \frac{M(s)}{L(s)\Delta(s)} \quad (15)$$

Donde los polinomios $M(s)$ y $L(s)$ son los mismos que en (4) y el polinomio $\Delta(s)$ se define como el menor factor común, formado por los factores de los polinomios $Y_r^+(s)$ y $Y_w^+(s)$ en (14). Los polos en el SPI (polos estables) se excluyen dado que no afectan a la salida controlada a medida que el tiempo tiende hacia infinito. De esta manera, todas las raíces de $\Delta(s)$ se localizan sobre el eje imaginario o tienen partes reales positivas. Así por ejemplo, si $w(t) = C_1 + C_2 \sin(2t) + C_3 e^{-3t}$ y $y_r(t) = C_4 t$ ($t \geq 0$). Se tiene, $W(s) = A_w(s)/s(s^2 + 2)(s + 3)$ y $Y_r(s) = A_r(s)/s^2$. Por lo que, $Y_w^+(s) = s(s^2 + 2)$ y $Y_r^+(s) = s^2$ y de esta forma se calcula $\Delta(s) = s^2(s^2 + 4)$.

Al expresar el controlador (4) en la forma (15), la ecuación polinómica (6) cambia a

$$\tilde{D}(s)L(s) + N(s)M(s) = T(s) \quad (16)$$

Donde

$$\tilde{D}(s) = D(s)\Delta(s) \quad (17)$$

El polinomio $\tilde{D}(s)$ va a tener una forma similar al polinomio (3) con la única diferencia de que el orden del polinomio se calcula ahora como

$$n = \text{grado}(\tilde{D}(s)) \quad (18)$$

Y es este valor el que se va a emplear en el Teorema 2 para definir el orden de los polinomios $M(s)$, $L(s)$ y $T(s)$.

IV. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CONTROL

El siguiente resultado demuestra que un controlador de la forma (15) puede resolver el Problema 1 formulado en la sección 2. Sin embargo, es en la próxima sección que se considera un procedimiento basado en el análisis de intervalos que permite su síntesis.

Teorema 3: Considere el sistema de control de la Fig. 1 donde la planta $P(s)$ está sujeta a incertidumbres paramétricas expresadas a través de los polinomios intervalos (2) y (3). La entrada de referencia $y_r(t)$ y la señal de perturbación $w(t)$ vienen dadas por las expresiones que aparecen en (13), y el polinomio $\Delta(s)$ se define como el menor factor común formado por los factores de los polinomios $Y_r^+(s)$ y $Y_w^+(s)$ en (14). Entonces, si ninguna raíz del polinomio $\Delta(s)$ es un cero de $P(s)$, existe un controlador (15) tal que la salida controlada $y(t)$ sigue a $y_r(t)$ y rechaza a $w(t)$ en forma asintótica y robusta.

Prueba: Si ninguna raíz de $\Delta(s)$ es un cero de la función de transferencia de la planta $P(s) = [N(s)]/[D(s)]$ entonces $[D(s)]\Delta(s)$ son coprimos. Por lo que existe un controlador de la forma $M(s)/L(s)$ tal que el polinomio $T(s)$ en la ecuación

$$[D(s)]\Delta(s)L(s) + [N(s)]M(s) = T(s)$$

permite realizar una asignación arbitraria de polos a lazo cerrado. Se propone entonces que el controlador (15) ($M(s)/(L(s)\Delta(s))$) cumple los objetivos de control.

En lo que sigue, por comodidad en la manipulación de las expresiones, se suprime la dependencia de la variable s . La salida excitada por $w(t)$ viene dada por

$$Y_w = \frac{PW}{1 + PC} = \frac{[N]L\Delta A_d}{Y_w^- Y_w^+ T} \quad (19)$$

Como todas las raíces inestables de Y_w^+ se cancelan a través de Δ en (19), todos los polos de Y_d se encuentran localizados en el SPI. De esta manera,

se tiene que $y_w(t) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. Esto es, la respuesta excitada por $w(t)$ se cancela asintóticamente a la salida. Luego, se calcula la salida $y_{y_r}(t)$ excitada por $y_r(t)$ como $Y_{y_r} = M[N]A_r/Y_r^-Y_r^+T$. La señal de error en la Fig. 1 se expresa mediante

$$E = Y_r - Y_{y_r} = \frac{[D]L\Delta A_r}{Y_r^-Y_r^+T} \quad (20)$$

De nuevo, todas las raíces inestables de Y_r^+ se cancelan con Δ . Por lo que se desprende que $e(t) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. Hasta ahora se ha probado el seguimiento de la entrada de referencia y el rechazo a la señal de perturbación de manera asintótica. A partir de (19) y (20) se aprecia que incluso si los coeficientes de los polinomios $[N]$ y $[D]$ varían en el interior de los intervalos (2) y (3), mientras se mantenga la condición de estabilidad del sistema de control a lazo cerrado y las raíces inestables de Y_r^+ y Y_w^+ se cancelen a través de Δ , el sistema continuará garantizando el seguimiento y el rechazo a la perturbación. O sea, lo hará de manera robusta.

V. SÍNTESIS DEL CONTROLADOR

Para sintetizar el controlador (15) se supone que se dispone de un modelo incierto de la planta $P(s)$ en el sistema de control de la Fig. 1 descrito por los polinomios intervalo $[N(s)]$ y $[D(s)]$ (2, 3). Posteriormente, a partir del conocimiento de la forma (constante, rampa, etc.) de la entrada de referencia $y_r(t)$ y de la señal de perturbación $w(t)$, puede calcularse el polinomio $\Delta(s)$. A continuación, se construye el polinomio intervalo $[\tilde{D}(s)]$ empleando (17) y se calcula el valor de n a través de (18), valor que permite determinar el orden de los polinomios del controlador $M(s)$, $L(s)$ en (4) y del polinomio deseado a lazo cerrado $T(s)$ que se emplea en (16). La ecuación polinómica (16) puede expresarse como un sistema de ecuaciones lineales intervalo de la forma

$$[A][x] = [b] \quad (21)$$

Comentario 2: A pesar que el controlador se definió inicialmente en (4) sin usar polinomios intervalo. La solución de un sistema de ecuaciones lineales intervalo (21) va a proporcionar un resultado intervalo.

La matriz intervalo $[A]_{(2n \times 2n)}$ en (21) se construye a partir de los polinomios inciertos $[N(s)]$ y $[\tilde{D}(s)]$ utilizando (11)

$$\begin{bmatrix} [\bar{a}_n] & 0 & 0 & \dots & 0 & [b_n] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & [\bar{a}_n] & 0 & \dots & 0 & \vdots & [b_n] & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ [\bar{a}_1] & \vdots & \vdots & \ddots & [\bar{a}_n] & [b_1] & \vdots & \vdots & \ddots & [b_n] \\ [\bar{a}_0] & [\bar{a}_1] & \vdots & \ddots & \vdots & [b_0] & [b_1] & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & [\bar{a}_0] & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & [b_0] & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & [\bar{a}_1] & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & [b_1] \\ 0 & 0 & \dots & 0 & [\bar{a}_0] & 0 & 0 & \dots & 0 & [b_0] \end{bmatrix} \quad (22)$$

El controlador viene dado por el vector intervalo

$$[x] = [[x_1] \quad [x_2] \quad \dots \quad [x_{2n}]]^T \quad (23)$$

Con respecto a las especificaciones, se va a adoptar un criterio de garantía de polos dominantes [22]. En este criterio, los requerimientos en el tiempo de la salida controlada $y(t)$ se especifican mediante un par de polos conjugados $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$. Su dominancia requiere que la relación entre la parte real de los otros polos y $-\alpha$ exceda un factor λ (λ se toma generalmente al menos de 3 a 5 veces). De esta manera, los demás polos se encuentran posicionados a la izquierda de la línea vertical $s = -\lambda\alpha$. En este trabajo, el polinomio a lazo cerrado deseado $T(s)$ se expresa como

$$T(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + \lambda\zeta\omega_n)^{2n-3} \quad (24)$$

El coeficiente de amortiguación ξ y la frecuencia natural ω_n de los polos dominantes se determinan en términos del sobrepico M_p y el tiempo de establecimiento T_s deseados haciendo [26].

$$M_p = e^{(-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \Rightarrow \zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\ln(M_p)}\right)^2}} \quad (25)$$

$$T_s = 4/(\zeta\omega_n) \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{\zeta T_s}$$

Debe subrayarse que en (21) pueden tenerse especificaciones intervalo o no. En el caso de que se adopte un polinomio convencional, la ecuación (21) toma la forma $[A][x] = b$. Y el vector b se obtiene a partir de los coeficientes de (24), imponiendo (25). Esto es, se tendrá un vector de la forma

$$b = [t_{2n-1} \quad t_{2n-2} \quad \dots \quad t_0]^T \quad (26)$$

Por otro lado, para calcular un vector de especificaciones intervalo $[b]$. En este trabajo, se define una región en el plano complejo como $\mu_1 \% \leq M_p \leq \mu_2 \%$ y $\varepsilon_1 \leq T_s \leq \varepsilon_2$. Luego, usando $M_p = \mu_1/100$ y $T_s = \varepsilon_1$ en (25), se computa un polinomio deseado de la forma (24) y sus coeficientes forman $b^+ = [t_i^+], i = 0, \dots, 2n - 1$. Repitiendo el procedimiento con las especificaciones del otro

extremo $M_p = \mu_2/100$ y $T_s = \varepsilon_2$ resulta el vector $\mathbf{b}^- = [t_i^-], i = 0, \dots, 2n - 1$, obteniéndose

$$[\mathbf{b}] = [\mathbf{b}^-, \mathbf{b}^+] \quad (27)$$

Una vez formulado el sistema de ecuaciones lineales intervalo (21) con las especificaciones expresadas como (26) o (27), debe resolverse para determinar el controlador $[\mathbf{x}]$.

Desde el artículo inicial de Oetti y Prager [27], el problema de resolución de un sistema de ecuaciones lineales intervalo ha recibido una gran atención. En [28] se presentan un conjunto de resultados de singularidad para matrices intervalo y diversas pruebas para verificarla. En [29] se formula un método de cerradura de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales intervalo sobredeterminado. En [30] se propone un método de cómputo de la inversa de una matriz intervalo, en [31] como calcular su determinante empleando la eliminación de Gauss y en [32] como obtener la forma canónica de Jordan y sus aplicaciones. Nirmala y Ganesan [33] proponen un método iterativo de Jacobi para resolver el sistema de ecuaciones intervalo y luego, los mismos autores, en [34], un método basado en las operaciones elementales de Gauss-Jordan empleando la aritmética de intervalos.

El conjunto solución de (21) definido como [28]

$$\Psi = \{\mathbf{x}: \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ para algún } \mathbf{A} \in [\mathbf{A}] \text{ y } \mathbf{b} \in [\mathbf{b}]\}$$

contiene todos los controladores para los cuales existe una planta $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ y un polinomio deseado $\mathbf{b} \in [\mathbf{b}]$ de forma que $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. En este trabajo se va a resolver (21) empleando la función *verifylss* disponible en INTLAB [35]. INTLAB es una librería de aritmética de intervalo desarrollada en Matlab. La función *verifylss* utiliza en una primera etapa de resolución el método de Krawczyk y si es necesario, conmuta al método de Neumaier [36].

Dado que el conjunto solución es en general no convexo [28], muchos métodos de resolución, incluyendo la función *verifylss*, buscan una cerradura interna convexa de Ψ . Otro aspecto que debe tenerse presente es el redondeo. Un intervalo $[a] = [a^-, a^+]$ puede no ser representado en una computadora si a^- y a^+ no están en código de máquina. Esto es, en la computadora, a^- y a^+ son usualmente redondeados, a^- hacia abajo y a^+ hacia arriba. Con estas dos afirmaciones, lo que se quiere subrayar es que el intervalo solución $[\mathbf{x}]$ de (21) que se está obteniendo, contiene otras soluciones además de las del problema original. Para recuperar el controlador, los polinomios $M(s)$ y $L(s)$ de (15)

deben extraerse del vector intervalo (23) computado a través de la solución de (21). A ese fin, en este trabajo, se analiza un intervalo reducido del vector $[\mathbf{x}]$ mediante simulaciones. Para obtener este intervalo reducido se calcula el centro y el radio de cada intervalo de los elementos del vector $[\mathbf{x}]$ haciendo

$$x_{c_i} = \frac{1}{2}(x_i^+ + x_i^-), x_{R_i} = \frac{1}{2}(x_i^+ - x_i^-), i = 1, \dots, 2n. \quad (28)$$

Y luego, se toma una franja alrededor de cada centro de intervalo x_{c_i} de radio δx_{R_i} ($\delta x_{R_i} < x_{R_i}$). Resultando un vector intervalo del controlador reducido $[\delta\mathbf{x}]$ expresado como

$$[\delta\mathbf{x}] = [\delta\mathbf{x}^-, \delta\mathbf{x}^+] \quad (29)$$

Con extremos en cada intervalo dados por

$$\delta x_i^- = x_{c_i} - \delta x_{R_i}, \delta x_i^+ = x_{c_i} + \delta x_{R_i}, i = 1, \dots, 2n$$

Inmediatamente, se hacen diversas simulaciones en el sistema de control de la Fig. 1 empleando diferentes controladores provenientes del intervalo (29). Al final de este procedimiento, se seleccionan unos coeficientes en particular $[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{2n}]^T \in [\mathbf{x}]$ para implementar el controlador (15) como

$$[l_{n-1} \ \dots \ l_0 \ m_{n-1} \ \dots \ m_0]^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{2n}]^T \quad (30)$$

En la Tabla 1, se resumen los pasos necesarios para obtener el controlador (15).

Tabla 1. Procedimiento de síntesis del controlador robusto.

Entrada	Modelo intervalo de la planta $P(s) = [N(s)]/[D(s)]$ y conocimiento de la forma de la entrada de referencia $y_r(t)$ y de la señal de perturbación $w(t)$ (Constante, rampa, senoide, etc.)
Paso 1	En base a la naturaleza de $y_r(t)$ y de $w(t)$ calcular el polinomio $\Delta(s)$.
Paso 2	Construir el polinomio $[\tilde{D}(s)] = \Delta(s)[D(s)]$ y calcular el valor de $n = \text{grado}(\tilde{D}(s))$
Paso 3	Con la información de los polinomios inciertos $[N(s)]$ y $[\tilde{D}(s)]$ formar la matriz intervalo $[\mathbf{A}]$ (22)
Paso 4	En base a los requerimientos (1) $\{M_p \text{ y } T_s\}$ o (2) $\{\mu_1 \% \leq M_p \leq \mu_2 \% \text{ y } \varepsilon_1 \leq T_s \leq \varepsilon_2\}$ calcular el vector intervalo de especificaciones como (1) \mathbf{b} o (2) $[\mathbf{b}] = [\mathbf{b}^-, \mathbf{b}^+]$
Paso 5	Computar el controlador intervalo $[\mathbf{x}] = [[x_1] \ [x_2] \ \dots \ [x_{2n}]]^T$ mediante la resolución del sistema (1) $[\mathbf{A}][\mathbf{x}] = \mathbf{b}$ o (2)

	$[A][x] = [b]$ usando la función <i>verifylss</i> de INTLAB.
Paso 6	Determinar el controlador intervalo reducido $[\delta x] = [\delta x^-, \delta x^+]$ especificando una tolerancia δ
Salida	Función de transferencia del controlador $C(s)$ expresada en la forma de intervalos usando $[\delta x]$

VI. RESULTADOS

En esta sección se van a construir controladores mediante la metodología propuesta de análisis de intervalos. Se consideran tres aplicaciones: un experimento de flujo de calor, un sistema de tanques acoplados y un motor de corriente continua. Su selección se basó en que la fuente de la incertidumbre es diferente en cada uno. En el experimento de flujo de calor la incertidumbre proviene de retardos de transporte, en el sistema de tanques acoplados se origina de dinámicas no lineales y finalmente, en el motor de corriente continua, aparece directamente en la tolerancia de los parámetros del motor.

En todas las aplicaciones se van a considerar entradas de referencia y señales de perturbación constantes, esto resulta en que el polinomio Δ en la ecuación del controlador (15) será en todo momento

$$\Delta(s) = s \quad (31)$$

Para cada aplicación se probarán tres controladores dentro del intervalo reducido (29), que se identifican con las funciones de transferencia $C_-(s)$, $C_+(s)$ y $C_c(s)$. Los coeficientes de los polinomios $M(s)$ y $L(s)$ en (15) se obtienen usando δx^- para $C_-(s)$, δx^+ para $C_+(s)$ y $(\delta x^+ + \delta x^-)/2$ para $C_c(s)$.

A. Experimento de flujo de calor

El aparato se muestra en la Fig. 2 donde se aprecia el ducto de fibra de vidrio con los componentes siguientes: un elemento calentador y un soplador localizados en un extremo y tres sensores de temperatura a lo largo del ducto. La salida controlada corresponde a la temperatura y la señal de control es el voltaje aplicado al elemento

calentador que se encuentra dentro del rango $[0, 12]$ V (el voltaje del soplador se mantiene constante). Se han identificado tres modelos para las temperaturas de cada sensor [37]. Los mismos vienen dados por las siguientes funciones de transferencia.

$$G_1(s) = \frac{0.3115}{s + 0.0286} e^{-0.3s} \quad (32)$$

$$G_2(s) = \frac{0.2179}{s + 0.0357} e^{-0.63s} \quad (33)$$

$$G_3(s) = \frac{0.2179}{s + 0.0357} e^{-0.85s} \quad (34)$$

Se va a utilizar la aproximación de Padé de primer orden $e^{-t_d s} = (2 - t_d s)/(2 + t_d s)$ en las ecuaciones previas, para aproximar el retardo de transporte. Lo anterior resulta en

$$P_1(s) = \frac{2.076 - 0.3115s}{s^2 + 6.7s + 0.2186} \quad (35)$$

$$P_2(s) = \frac{0.726 - 0.2178s}{s^2 + 3.37s + 0.119} \quad (36)$$

$$P_3(s) = \frac{0.512 - 0.2178s}{s^2 + 2.39s + 0.084} \quad (37)$$

Al determinar las variaciones máximas de los coeficientes de cada polinomio en los tres modelos previos. Pueden combinarse en una planta intervalo dada por

$$P(s) = \frac{[N(s)]}{[D(s)]} = \frac{[0.512, 2.076] + [-0.3115, -0.2178]s}{s^2 + [2.39, 6.7]s + [0.084, 0.2186]} \quad (38)$$

En la Tabla 2 se muestran los resultados de aplicar cada paso del procedimiento de síntesis del controlador robusto de la Tabla 1 al experimento de flujo de calor.

Tabla 2. Síntesis del controlador robusto para el experimento de flujo de calor.

Entrada	Modelo dado en (38). Las señales $y_r(t)$ y $w(t)$ se suponen constantes de amplitud incierta.
Paso 1	$\Delta(s) = s$
Paso 2	$[\tilde{D}(s)] = s^3 + [2.39, 6.7]s^2 + [0.084, 0.2186]s$ $n = 3$

Paso 3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [2.39, 6.7] & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.084, 0.2186] & [2.39, 6.7] & 1 & [-0.3115, -0.2178] & 0 & 0 \\ 0 & [0.084, 0.2186] & [2.39, 6.7] & [0.512, 2.076] & [-0.3115, -0.2178] & 0 \\ 0 & 0 & [0.084, 0.2186] & 0 & [0.512, 2.076] & [-0.3115, -0.2178] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [0.512, 2.076] \end{bmatrix}$
Paso 4	$M_p = 0.01$ y $t_s = 45s \Rightarrow \zeta = 0.826$ y $\omega_n = 0.107$ $T(s) = (s^2 + 0.177s + 0.0115)(s + 2)(s + 3)(s + 4)$ $\mathbf{b} = [1 \ 9.177 \ 27.6 \ 28.7 \ 4.55 \ 0.278]^T$
Paso 5	$\mathbf{x} = [1 \ [2.47, 6.78] \ [-33.2, 44.9] \ [-141.7, 145.1] \ [-18.8, 24.6] \ [-0.11, 0.54]]^T$
Paso 6	Para $\delta = 2.5 \%$ $\delta\mathbf{x} = [1 \ [4.57, 4.68] \ [4.86, 6.82] \ [-1.89, 5.28] \ [2.33, 3.42] \ [0.206, 0.223]]^T$
Salida	$C(s) = \frac{[-1.89, 5.28]s^2 + [2.33, 3.42]s + [0.206, 0.223]}{s^3 + [4.57, 4.68]s^2 + [4.86, 6.82]s}$



Figura 2. Proceso de flujo de calor.

De la salida de la Tabla 2 se obtienen los controladores:

$$\begin{aligned} C_-(s) &= \frac{-1.89s^2 + 2.33s + 0.206}{s^3 + 4.57s^2 + 4.86s} \\ C_+(s) &= \frac{5.28s^2 + 3.42s + 0.223}{s^3 + 4.68s^2 + 6.82s} \\ C_c(s) &= \frac{2.77s^2 + 2.88s + 0.21}{s^3 + 4.63s^2 + 5.84s} \end{aligned} \quad (39)$$

La Fig. 3 muestra el seguimiento satisfactorio del perfil de temperatura que se aplica en la entrada de referencia para los tres controladores (39). Se selecciona (34) como el modelo del proceso de flujo de calor para evaluar a los tres controladores, dado que es el que presenta el mayor retardo de transporte. Una vez que la temperatura se mantiene operando en 18 °C, se aplica una perturbación constante de 2 °C en el instante $t = 350$ s. Puede apreciarse que el rechazo se logra en forma inmediata. En la Fig. 4 se ilustra el cambio en el voltaje del elemento calefactor que se requiere en los tres controladores. Los controladores C_- y C_c se

encuentran dentro de los límites físicos de voltaje, no así el controlador C_+ que satura en algunos instantes.

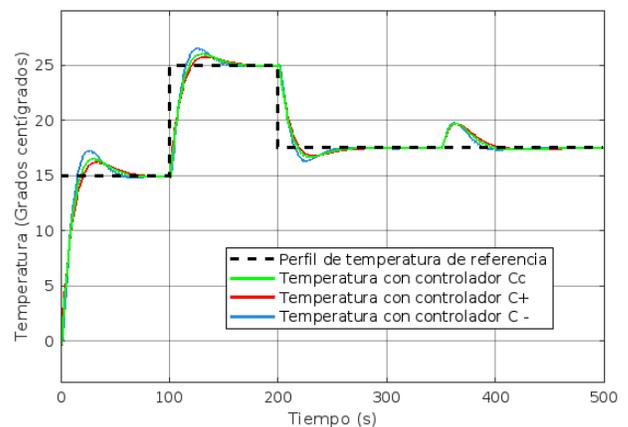


Figura 3. Temperatura controlada del sensor 3.

B. Sistema de tanques acoplados

El sistema de tanques acoplados consta de una bomba y dos tanques. Cada tanque dispone de un sensor de presión para medir el nivel de agua. La bomba lleva el agua desde un depósito inferior hasta la parte superior del sistema. Dependiendo de la configuración de las válvulas de salida, el agua fluye hacia el tanque superior, el inferior o ambos. Una configuración se muestra en la Fig. 5, donde la salida de la bomba se conecta al primer tanque. El modelo no lineal en variables de estado está dado por las ecuaciones [38].

$$\dot{x}_1(t) = -0.904\sqrt{x_1(t)} + 0.258u(t) \quad (40)$$

$$\dot{x}_2(t) = 0.904\sqrt{x_1(t)} - 0.508\sqrt{x_2(t)}$$

$$y(t) = x_2(t)$$

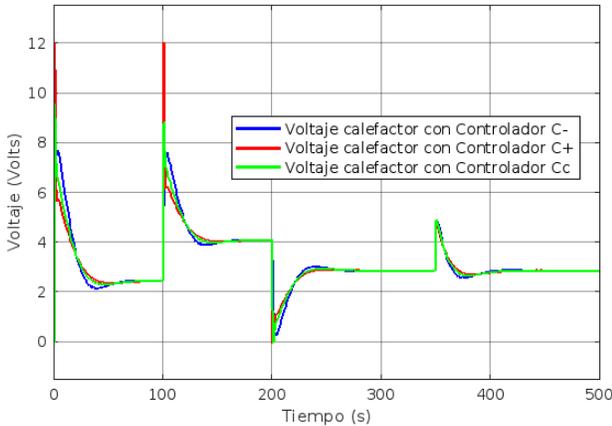


Figura 4. Voltaje del elemento calefactor.

El vector de estado $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ se iguala a los niveles de cada tanque, la señal de control $u(t)$ corresponde al voltaje de entrada aplicado a la bomba, y la salida controlada $y(t)$ se escoge como el nivel de agua en el segundo tanque. El nivel máximo en cada tanque es 30 cm, y la señal de control está restringida al intervalo $[0, 22]$ V. Para construir un modelo lineal paramétrico en la forma de una función de transferencia intervalo. Se considera que los niveles de agua en los tanques varían en el interior de la región rectangular de la Fig. 6. Si se linealiza (39) en los puntos (A), (B), (C), y (D) de la Fig. 4, se obtienen las funciones de transferencia

$$P_A(s) = \frac{0.04257}{s^2 + 0.2576s + 0.0153} \quad (41)$$

$$P_B(s) = \frac{0.04257}{s^2 + 0.2184s + 0.0088} \quad (42)$$

$$P_C(s) = \frac{0.02458}{s^2 + 0.1487s + 0.0051} \quad (43)$$

$$P_D(s) = \frac{0.02458}{s^2 + 0.1879s + 0.0088} \quad (44)$$

Al determinar las variaciones máximas de los coeficientes de cada polinomio en los cuatro modelos previos. Pueden combinarse en una planta intervalo dada por

$$P(s) = \frac{[N(s)]}{[D(s)]} = \frac{[0.02458, 0.04257]}{s^2 + [0.1487, 0.2576]s + [0.0051, 0.0153]} \quad (45)$$

La ecuación (45) aproxima al sistema no lineal (40) en el interior de la región rectangular de la Fig. 4. En la Tabla 3 se muestran los resultados de aplicar cada paso del procedimiento de síntesis del controlador robusto de la Tabla 1 al sistema de tanques acoplados. De la salida de la Tabla 3 se obtienen los controladores:

$$C_-(s) = \frac{0.849s^2 + 0.294s + 0.0232}{s^3 + 1.16s^2 + 0.431s}$$

$$C_+(s) = \frac{2.87s^2 + 0.513s + 0.033}{s^3 + 1.22s^2 + 0.509s} \quad (46)$$

$$C_c(s) = \frac{1.86s^2 + 0.404s + 0.028}{s^3 + 1.19s^2 + 0.47s}$$

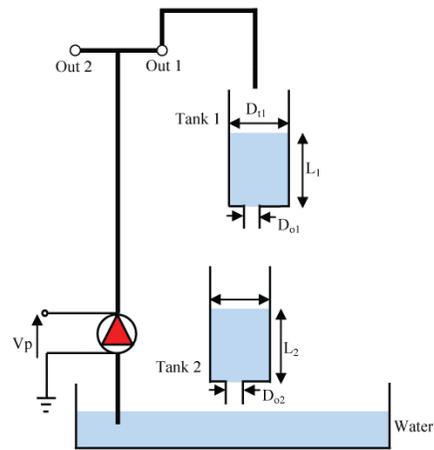


Figura 5. Configuración estándar del sistema de tanques

En la Fig. 7 se aprecia la evolución del nivel de agua en el segundo tanque para una entrada de referencia que cambia en forma escalonada en varios instantes, para el modelo no lineal del sistema de tanques acoplados (40) cuando se aplican los controladores (46). El seguimiento de la entrada de referencia es muy satisfactorio y se encuentra dentro de las especificaciones de desempeño deseadas para cualquiera de los controladores. Si bien, el controlador C_+ tiende a producir la respuesta más rápida. En la misma figura, una vez que el nivel del tanque se ha estabilizado en 10 cm, se aplica una señal de perturbación de -3 cm en el instante $t = 300$ s. Puede observarse que los tres controladores rechazan la perturbación. En la Fig. 8 se ilustra el esfuerzo de control requerido en el voltaje de la bomba de alimentación. El controlador C_+ exhibe los mayores cambios, evidenciando que el comportamiento más rápido en el seguimiento, se logra a expensas de mayores voltajes.

Tabla 3. Síntesis del controlador robusto para el sistema de tanques acoplados.

Entrada	Modelo dado en (45). Las señales $y_r(t)$ y $w(t)$ se suponen constantes de amplitud incierta.
Paso 1	$\Delta(s) = s$
Paso 2	$[\bar{D}(s)] = s^3 + [0.1487, 0.2576]s^2 + [0.0051, 0.0153]s$ $n = 3$
Paso 3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.1487, 0.2576] & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.0051, 0.0153] & [0.1487, 0.2576] & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [0.0051, 0.0153] & [0.1487, 0.2576] & [0.02458, 0.04257] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [0.0051, 0.0153] & 0 & [0.02458, 0.04257] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [0.02458, 0.04257] \end{bmatrix}$
Paso 4	$1\% \leq M_p \leq 5\%$ y $45\text{ s} \leq T_s \leq 55\text{ s}$ $T_-(s) = (s^2 + 0.1454s + 0.00775)(s + 0.37)^3$ $T_+(s) = (s^2 + 0.177s + 0.01659)(s + 0.45)^3$ $\mathbf{b} = [1 \ [1.25, 1.53] \ [0.58, 0.86] \ [0.12, 0.22] \ [0.0105, 0.0262] \ [0.00039, 0.0015]]^T$
Paso 5	$\mathbf{x} = [1 \ [0.997, 1.378] \ [0.209, 0.730] \ [-4.87, 8.59] \ [-0.32, 1.13] \ [-0.004, 0.061]]^T$
Paso 6	Para $\delta = 15\%$ $\delta\mathbf{x} = [1 \ [1.16, 1.22] \ [0.431, 0.509] \ [0.849, 2.87] \ [0.294, 0.513] \ [0.0232, 0.0330]]^T$
Salida	$(s) = \frac{[0.849, 2.87]s^2 + [0.294, 0.513]s + [0.0232, 0.0330]}{s^3 + [1.16, 1.22]s^2 + [0.431, 0.509]s}$

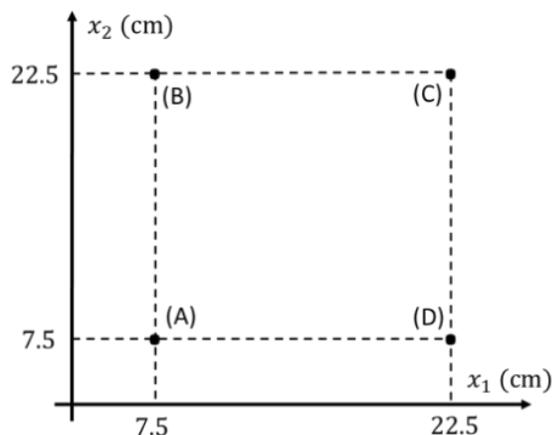


Figura 6. Región de variación de los niveles de agua en el sistema de tanques

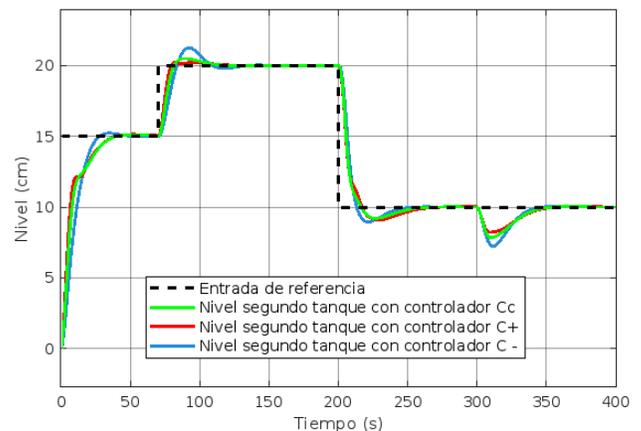


Figura 7. Control del nivel de agua en el segundo tanque.

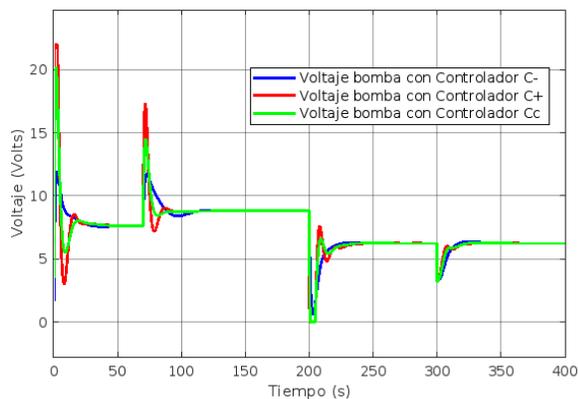


Figura 8. Cambio en el voltaje de la bomba.

C. Motor de corriente continua

Se considera el modelo matemático de un motor de corriente continua de excitación independiente descrito por la función de transferencia

$$P(s) = \frac{K_\tau}{(Js + B)(L_a s + R_a) + K_\tau K_m} \quad (47)$$

La señal de control es el voltaje aplicado al circuito de armadura (V) y la salida controlada es la velocidad angular (rad/s). La descripción de los parámetros, sus valores nominales y tolerancias se describen en la Tabla 4 [39]. Para obtener un modelo función de transferencia intervalo del motor, se reemplazan los valores nominales y se consideran las tolerancias en (47). También deben aplicarse las operaciones aritméticas siguientes para los intervalos $[a] \triangleq [a^-, a^+]$ y $[b] \triangleq [b^-, b^+]$ [36].

$$\begin{aligned} [a] + [b] &= [a^- + b^-, a^+ + b^+] \\ [a] - [b] &= [a^- - b^+, a^+ - b^-] \end{aligned} \quad (48)$$

$$[a] \times [b] = \begin{bmatrix} \min\{a^- b^-, a^- b^+, a^+ b^-, a^+ b^+\}, \\ \max\{a^- b^-, a^- b^+, a^+ b^-, a^+ b^+\} \end{bmatrix}$$

La función de transferencia intervalo del motor viene dada por:

$$P(s) = \frac{[N(s)]}{[D(s)]} = \frac{[0.61194, 0.69006]}{[0.00033048, 0.00054648]s^2 + [0.019569, 0.027547]s + [0.37709, 0.48071]} \quad (49)$$

En la Tabla 5 se muestran los resultados de aplicar cada paso del procedimiento de síntesis del

controlador robusto de la Tabla 1 al motor de corriente continua.

Tabla 4. Descripción de los parámetros del motor de corriente continua.

Parámetro	Descripción	Valor nominal	Tolerancia
R_a	Resistencia de armadura	0.54 [Ω]	7 %
B	Coficiente de fricción viscosa	0.00653 [$(N \cdot m \cdot seg)/rad$]	20 %
L_a	Inductancia de armadura	0.01 [H]	15 %
J	Inercia del motor	0.0432 [$kg \cdot m^2$]	10 %
K_τ, K_m	Constantes de torque y del motor	0.651 [$V/(rad/seg)$]	6 %

Tabla 5. Síntesis del controlador robusto para el motor de corriente continua.

Entrada	Modelo dado en (49). Las señales $y_r(t)$ y $w(t)$ se suponen constantes de amplitud incierta.
Paso 1	$\Delta(s) = s$
Paso 2	$[\bar{D}(s)] = [0.00033048, 0.00054648]s^3 + [0.019569, 0.027547]s^2 + [0.37709, 0.48071]s$ $n = 3$
Paso 3	$\begin{bmatrix} [0.00033, 0.00055] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.01957, 0.02755] & [0.00033, 0.00055] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.3771, 0.4807] & [0.01957, 0.02755] & [0.00033, 0.00055] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [0.3771, 0.4807] & [0.01957, 0.02755] & [0.6119, 0.690] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [0.3771, 0.4807] & 0 & [0.6119, 0.690] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [0.6119, 0.690] \end{bmatrix}$

Paso 4	$0.5 \% \leq M_p \leq 1 \% \text{ y } T_s = 0.25 \text{ s}$ $T_-(s) = (s^2 + 32s + 346)(s + 80)(s + 81)(s + 82)$ $T_+(s) = (s^2 + 32s + 375.14)(s + 80)(s + 81)(s + 82)$ $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 275 \\ [27\ 804, 27\ 833] \\ [1\ 245\ 262, 1\ 252\ 343] \\ [23\ 813\ 492, 24\ 387\ 025] \\ [183\ 850\ 560, 199\ 334\ 390] \end{bmatrix}$
Paso 5	$x = \begin{bmatrix} [1535, 3025] \\ [250\ 000, 759\ 250] \\ [-3\ 905\ 566, 72\ 105\ 242] \\ [-1\ 495\ 398, 2\ 199\ 049] \\ [-19\ 585\ 566, 48\ 693\ 921] \\ [262\ 868\ 031, 325\ 741\ 723] \end{bmatrix}$
Paso 6	Para $\delta = 10 \%$ $\delta x = \begin{bmatrix} [2206, 2355] \\ [479\ 181, 530\ 094] \\ [30\ 299\ 297, 37\ 900\ 378] \\ [167\ 102, 536\ 547] \\ [11\ 140\ 203, 17\ 968\ 152] \\ [291\ 161\ 192, 297\ 448\ 561] \end{bmatrix}$
Salida	$C(s) = \frac{[167\ 102, 536\ 547]s^2 + [11\ 140\ 203, 17\ 968\ 152]s + [291\ 161\ 192, 297\ 448\ 561]}{[2206, 2355]s^3 + [479\ 181, 530\ 094]s^2 + [30\ 299\ 297, 37\ 900\ 378]s}$

Para la simulación del sistema de control del motor de corriente continua se empleará solamente el controlador central $C_c(s)$ obtenido a partir de la salida de la Tabla 5. Como modelo del motor se emplearán las funciones de transferencia $P_-(s)$, $P_+(s)$ y $P_c(s)$ calculadas a partir de (49). La fig. 9 muestra el resultado del seguimiento de una entrada de referencia constante de valor 188.50 rad/s. Lo que equivale aproximadamente a 1800 RPM. El controlador central funciona de manera muy similar para las tres variaciones consideradas en el modelo del motor. También puede apreciarse el rechazo a una señal de perturbación de -10 rad/s aplicada en el instante $t = 1$ s.

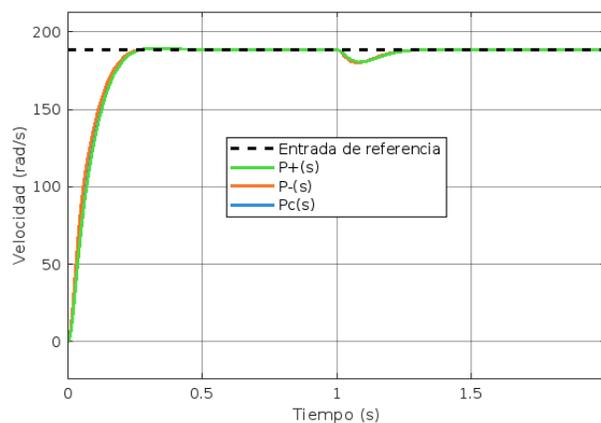


Figura 9. Control de velocidad del motor.

A su vez, la Fig. 10 ilustra la señal de control. El voltaje aplicado al motor. Puede apreciarse que en este caso hay ciertas diferencias pero todas ellas dentro de las limitaciones físicas del motor.

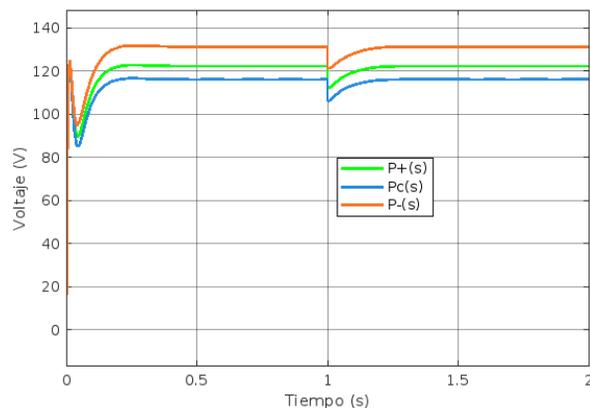


Figura 10. Voltaje aplicado al motor.

VII. CONCLUSIONES

Inicialmente el problema clásico de resolución de la ecuación polinómica de asignación de polos $D(s)L(s) + N(s)M(s) = T(s)$ para determinar los polinomios del controlador L y M , dados el polinomio de especificaciones T y los polinomios de la planta N y D se transforma en un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ donde la matriz A es una matriz de Sylvester construida a partir de los coeficientes de los polinomios N y D de la planta, el vector b está asociado a las especificaciones de diseño y el vector x a los coeficientes de los polinomios L y M a ser determinados para el controlador. Se demuestra que dados A y b , existe un controlador x si y solo si los polinomios N y D son coprimos y se verifican las condiciones $\text{grado}(L) = \text{grado}(D) - 1$ y $\text{grado}(T) = 2(\text{grado}(D)) - 1$.

Usando: (i) la condición de persistencia en la entrada de referencia $y_r(t)$ y la perturbación $w(t)$ del principio del modelo interno y, (ii) localizando los polos deseados a lazo cerrado en el SPI, se demuestra que un controlador de la forma $M / (L\Delta)$, con Δ el menor factor común de los factores de los polos inestables de $Y_r(s)$ y $W(s)$, logra el seguimiento asintótico con error de estacionario nulo de la entrada de referencia y el rechazo asintótico de la perturbación. Se demuestra igualmente que el seguimiento y el rechazo se alcanzan también de forma robusta. Esto es, cuando los coeficientes de los polinomios N y D varían en intervalos cerrados reales con cotas conocidas.

El controlador robusto de orden fijo de la forma $M / (L\Delta)$ se sintetiza a través de la resolución de un sistema de ecuaciones lineales intervalo utilizando el programa INTLAB. Mediante las simulaciones efectuadas en *MATLAB/Simulink* sobre distintos sistemas de interés práctico se validó el método de

diseño propuesto, logrando un control efectivo bajo distintas condiciones de seguimiento y rechazo a perturbaciones y manteniendo un comportamiento satisfactorio en la señal de control.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo brindado por el Programa de Investigación de la Universidad Metropolitana en Venezuela a través del proyecto PI-B-02-24-25.

REFERENCIAS

- [1] Shumafov, M.M., (2019). Stabilization of Linear Control Systems and Pole Assignment Problem: A Survey. *Vestnik St.Petersb. Univ.Math.* 52, pp. 349–367.
- [2] Chu, E.K., (2001). Optimization and pole assignment in control system design. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 11(5), pp. 1035-1053
- [3] Ackermann, J. E. (2009). Pole placement control. *Control System, Robotics and Automation*, 8(2011), 74-101.
- [4] Chen, C.T., (1987). Introduction to the linear algebraic method for control system design. *IEEE Control Systems Magazine*, 7(5), pp. 36-42.
- [5] Chen, C., (1999). *Linear System: Theory and Design*. Oxford University Press.
- [6] Åström, K. J., Wittenmark, B. (2013). *Computer-controlled systems: theory and design*. Courier Corporation.
- [7] Tu, Y. W., Ho, M. T. (2011). Robust second-order controller synthesis for model matching of interval plants and its application to servo motor control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 20(2), 530-537.
- [8] Francis, B. A. (Ed.). (1987). *A course in H^∞ control theory*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- [9] Chilali, M., & Gahinet, P. (1996). \mathcal{H}_∞ design with pole placement constraints: an lmi approach. *IEEE Transactions on automatic control*, 41(3), 358-367.
- [10] Badran, S. M., & Emam, A. S. (2012, May). H-infinity and Mixed H2/H-infinity with Pole-Placement Design via ILMI Method for Semi-

- active Suspension System. In *2012 Sixth Asia Modelling Symposium* (pp. 150-155). IEEE.
- [11] Benyamina, M., Bouhamida, M., Denai, M., & Taleb, R. (2018). Modeling and Control of a UPFC System Using Pole-Placement and Hinf Robust Control Techniques. *International Journal of Engineering and Technology (IJET)*.
- [12] Wajdi, S., Anis, S., & Garcia, G. (2015). Robust sliding mode control approach for systems affected by unmatched uncertainties using H_∞ with pole clustering constraints. *Optimal Control Applications and Methods*, 36(6), 919-935
- [13] Barmish, B. R., & Jury, E. I. (1994). New tools for robustness of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(12), 2525-2525.
- [14] Soylemez, M. T., & Munro, N. (1997). Robust pole assignment in uncertain systems. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 144(3), 217-224.
- [15] Le, X., & Wang, J. (2013). Robust pole assignment for synthesizing feedback control systems using recurrent neural networks. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 25(2), 383-393.
- [16] Soliman, H. M., & El Metwally, K. A. (2017). Robust pole placement for power systems using two-dimensional membership fuzzy constrained controllers. *IET Generation, Transmission & Distribution*, 11(16), 3966-3973.
- [17] Chang, W. J., Lin, Y. H., Du, J., & Chang, C. M. (2019). Fuzzy control with pole assignment and variance constraints for continuous-time perturbed Takagi-Sugeno fuzzy models: Application to ship steering systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 17(10), 2677-2692.
- [18] Dincel, E., & Söylemez, M. T. (2022). Robust PID controller design via dominant pole assignment for systems with parametric uncertainties. *Asian Journal of Control*, 24(2), 834-844.
- [19] Kazemi, M. H., & Tarighi, R. (2024). PID-based attitude control of quadrotor using robust pole assignment and LPV modeling. *International Journal of Dynamics and Control*, 1-13.
- [20] Francis, B. A., Wonham, W. M. (1976). The internal model principle of control theory. *Automatica*, 12(5), 457-465.
- [21] Hedberg, E., Löfberg, J., Helmersson, A. (2020). A pedagogical path from the internal model principle to Youla-Kučera parametrization. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2), 17374-17379.
- [22] Persson, P., Åström, K. (1992) Dominant pole design a unified view of PID controller tuning, *IFAC Proceedings Volumes*, 25(14), 377-382.
- [23] Moore, R. E., Kearfott, R. B., & Cloud, M. J. (2009). *Introduction to interval analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [24] Alefeld, G., & Herzberger, J. (2012). *Introduction to interval computation*. Academic press.
- [25] Jaulin, L., Kieffer, M., Didrit, O., Walter, E., Jaulin, L., Kieffer, M., & Walter, É. (2001). *Interval analysis*. Springer London.
- [26] Dorf, R., Bishop, R., (2017). *Modern control systems*. Pearson Prentice Hall.
- [27] Oettli, W., & Prager, W. (1964). Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides. *Numerische Mathematik*, 6, 405-409.
- [28] Rohn, J. (1989). Systems of linear interval equations. *Linear algebra and its applications*, 126, 39-78.
- [29] Rohn, J. (1996). Enclosing solutions of overdetermined systems of linear interval equations. *Reliab. Comput.*, 2(2), 167-171.
- [30] Nirmala, T., Datta, D., Kushwaha, H. S., & Ganesan, K. (2011). Inverse interval matrix: A new approach. *Applied Mathematical Sciences*, 5(13), 607-624.
- [31] Nirmala, T., Datta, D., Kushwaha, H. S., & Ganesan, K. (2013). The determinant of an interval matrix using Gaussian elimination method. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 88(1), 15-34.
- [32] Surya, S. H., Nirmala, T., & Ganesan, K. (2023). Jordan canonical form of interval matrices and

- applications. *Aust. J. Math. Anal. Appl.* 20(2), 17pp.
- [33]Nirmala, T., & Ganesan, K. (2019, June). Solution of interval linear system of equations- an iterative approach. In *The 11th National Conference on Mathematical Techniques and Applications* (Vol. 2112, No. 1, p. 020105).
- [34]Nirmala, T., & Ganesan, K. (2021, April). Solving system of interval linear equations by Gauss Jordan method using generalized interval arithmetic. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (Vol. 1130, No. 1, p. 012052). IOP Publishing.
- [35]Rump, S. M. (1999). INTLAB—interval laboratory. In *Developments in reliable computing*. Dordrecht: Springer Netherlands.
- [36]Hargreaves, G. I. (2002). Interval analysis in MATLAB. *Numerical Algorithms*, (2009.1).
- [37]Al-Saggaf, U., Mehedi, I., Bettayeb, M., and Mansouri, R. (2016). Fractional-order controller design for a heat flow process. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 230(7), 680-691.
- [38]Teppa-Garran, P. y El Gharib, G. (2024). Computer-assisted optimal tuning of PI controllers for nonlinear systems with amplitude constraints on the actuator. *Ciencia e Ingeniería*. 45(1), 1-10.
- [39]Peralta, A. M., Bautista, J. D. M., de Souza, R. U., & Arboleda, T. J. O. (2020). Modelación de Motor/generador de corriente continua conexión independiente con MATLAB/SIMULINK. *Dominio de las Ciencias*, 6(5), 361-377.