

ARK: <https://n2t.net/ark:/87558/tekhne.26.1.2>

Seguimiento robusto del nivel de líquido en un sistema de tanques acoplados usando desigualdades lineales matriciales

Pedro Teppa-Garran¹, Miguel Faggioni²
ptepa@unimet.edu.ve¹, mfaggioni@unimet.edu.ve²
Universidad Metropolitana, Caracas, Venezuela

Resumen

Muchos de los métodos empleados en el control de procesos industriales se basan en la linealización de las ecuaciones del modelo matemático del sistema en el punto de operación. Esto ocasiona que se ignoren dinámicas del proceso y la pérdida de robustez del controlador. El control del nivel de líquidos en tanques es un problema básico en la industria de procesos. En este trabajo, el modelo no lineal de un sistema de tanques acoplados se representa exactamente como un sistema lineal de parámetros variantes (LPV). El vector de parámetros se define como una función de los niveles de los tanques que se suponen inciertos pero variando dentro de los límites tecnológicos de operación del sistema de tanques. Esto permite caracterizar el sistema LPV mediante un politopo dentro del rango de operación de los tanques y de esta forma, empleando desigualdades matriciales lineales (LMI), diseñar un controlador robusto que asegure el seguimiento con error de estado estacionario nulo, de señales de referencia usadas frecuentemente en la práctica y ciertas especificaciones deseadas en la respuesta transitoria a lazo cerrado.

Palabras clave: Control de procesos, Sistema de tanques acoplados, Seguimiento robusto, Desigualdades matriciales lineales, LMI, Sistema lineal de parámetros variantes, LPV.

Robust tracking of the water level in a coupled-tank system employing Linear Matrix Inequalities

Abstract

Most of the methods employed in the industrial process control are based on the linearization of the mathematical model equations around an operating point. This leads to neglect some dynamics of the process and the loss of robustness of the controller. Liquid level control is a fundamental problem in the process industry. In this work, the nonlinear model of a coupled-tank system is described exactly by a linear parameter varying system (LPV). The parameter vector is defined as a function of the level of the tanks, which are supposed to be uncertain but changing between the technological operation limits of the tanks. This allows describing the LPV system by a polytope inside the operating range of the tanks and in this way, using linear matrix inequalities (LMI), design a robust controller that assures the tracking with zero-state error of input references used frequently in practice and some desired specifications in the closed-loop transient response.

Keywords: Process control, Coupled-tank system, Robust tracking, Linear Matrix Inequalities, LMI, Linear Parameter Varying System, LPV.

Suivi robuste du niveau d'eau dans un système de réservoirs couplés utilisant des inégalités matricielles linéaires

Resumé

La plupart des méthodes employées dans le contrôle des procédés industriels sont basées sur la linéarisation des équations du modèle mathématique autour d'un point de fonctionnement. Ceci conduit à négliger certaines dynamiques du processus et à la perte de robustesse du contrôleur. Le contrôle du niveau de liquide est un problème fondamental dans l'industrie des procédés. Dans ce travail, le modèle non linéaire d'un système de réservoirs couplés est décrit exactement par un système à paramètres variables linéaires (LPV). Le vecteur paramètres est défini en fonction du niveau des réservoirs, supposé incertain mais évoluant entre les limites technologiques de fonctionnement des réservoirs. Cela permet de décrire le système LPV par un polytope à l'intérieur de la plage de fonctionnement des réservoirs et de cette manière, en utilisant des inégalités matricielles linéaires (LMI), concevoir un contrôleur robuste qui assure le suivi avec erreur d'état zéro des références d'entrée utilisées fréquemment dans la pratique et certaines spécifications souhaitées dans la réponse transitoire en boucle fermée.

Mots clés: Contrôle de processus, système à réservoir couplés, suivi robuste, inégalités matricielles linéaires, LMI, système de variation de paramètres linéaires, LPV.

Rastreamento robusto do nível de água em um sistema de tanque acoplado empregando desigualdades matriciais lineares

Resumo

A maioria dos métodos empregados no controle de processos industriais baseia-se na linearização das equações do modelo matemático em torno de um ponto de operação. Isso leva a negligenciar algumas dinâmicas do processo e a perda de robustez do controlador. O controle de nível de líquido é um problema fundamental na indústria de processo. Neste trabalho, o modelo não linear de um sistema de tanques acoplados é descrito exatamente por um sistema variável de parâmetros lineares (LPV). O vetor de parâmetros é definido em função do nível dos tanques, que se supõe ser incerto, mas variável entre os limites tecnológicos de operação dos tanques. Isso permite descrever o sistema LPV por um politopo dentro da faixa de operação dos tanques e assim, usando desigualdades matriciais lineares (LMI), projetar um controlador robusto que garanta o rastreamento com erro de estado zero de referências de entrada usadas frequentemente na prática e algumas especificações desejadas na resposta transiente de malha fechada.

Palavras-chave: Controle de processo, Sistema de tanque acoplado, Rastreamento robusto, Desigualdades matriciais lineares, LMI, Sistema linear de variação de parâmetros, LPV.

i. INTRODUCCIÓN

Dentro de la industria de procesos aparece un problema fundamental, el control del nivel de líquidos almacenados en tanques y el flujo entre ellos [1], [2], [3]. Los líquidos suelen transformarse en los tanques mediante mezclas o procesos químicos. Las actividades que destacan son el bombeo de líquidos, su almacenamiento en los tanques y su posterior bombeo hacia otros tanques. Pero siempre asegurando el control de los niveles de los líquidos en los tanques. Esta es una operación básica en los sistemas de purificación del agua, en el filtrado de efluentes y su tratamiento, para procesar lácteos, bebidas y alimentos, en la operación de calderas, torres de destilación y tanques de mezclas y en el procesamiento de químicos industriales. En muchas oportunidades, suele ocurrir que los tanques estén acoplados, lo que se traduce en una interacción entre sus niveles y en algunos casos pueden aparecer comportamientos de fase no mínima [4], [5], [6].

En la literatura especializada se reportan numerosos métodos para controlar el nivel de líquido en sistemas de tanques acoplados. Entre ellos, pueden mencionarse: el control proporcional-integral-derivativo (PID) [7], [8], el control difuso [9], [10], el control PID de tipo fraccional [11], el control por rechazo activo de perturbaciones [12], [13], el control por *backstepping* [14], el control predictivo basado en modelos [15], el Control \mathcal{H}_2 [16], el control por modo deslizante [17] y el control óptimo [18], [19]; entre otros.

El diseño de controladores en ambientes industriales es complicado debido a varios factores, entre ellos pueden mencionarse [20], [21]: las no linealidades producidas por restricciones en los actuadores, el envejecimiento y desgaste del proceso, las incertidumbres ocasionadas por dinámicas no modeladas, el ruido de medición, perturbaciones externas y el deterioro en el

desempeño cuando se opera bajo condiciones de carga debido a la naturaleza variable de esta última.

Muchos de los métodos mencionados previamente utilizan la linealización de las ecuaciones del sistema en un punto de operación, lo que conlleva a ignorar ciertas dinámicas del sistema. Más aún, si por alguna perturbación externa, el sistema varía su punto de operación, el controlador diseñado podría degradar su desempeño por pérdida de robustez.

En este trabajo se considera que los niveles de los tanques son inciertos pero varían dentro de las cotas tecnológicas del equipo. Esto es usado para representar los términos no lineales del modelo matemático del sistema de tanques de manera exacta a través de un sistema LPV [22], [23], [24], [25]. Posteriormente, se caracteriza el sistema LPV a través de un politopo [26], [27], [28] que variará dentro del intervalo de operación del sistema y de esta forma emplear un enfoque de desigualdades matriciales lineales [29], [30], [31], [32] para diseñar un controlador que garantice el seguimiento robusto del nivel del líquido en el tanque con error de estado estacionario cero y ciertas especificaciones de amortiguación y velocidad de la respuesta transitoria.

El artículo es organizado de la siguiente manera. La sección 2 describe el modelo matemático no lineal del sistema de tanques acoplados y su representación politópica y formula el problema del trabajo. En la sección 3 se resuelve el problema de seguimiento robusto planteado, utilizando el principio del modelo interno dentro de un enfoque de desigualdades matriciales lineales. A continuación, en la sección 4 se implementa en tiempo real el método propuesto en el sistema de tanques acoplados. Finalmente, la sección 5 aporta las conclusiones del trabajo.

ii. SISTEMA DE TANQUES ACOPLADOS

A. Modelo matemático

El sistema de tanques acoplados se muestra en la Fig. 1, puede apreciarse que consta de una bomba, dos tanques y un depósito de agua. Cada tanque dispone de un sensor de presión para medir el nivel de líquido. La bomba suministra agua desde el recipiente inferior hasta la parte superior del sistema. Dependiendo de la configuración de las válvulas, el agua fluye hasta el tanque 1, el tanque 2 o ambos. Un esquema típico de conexión se muestra en la Fig. 2, donde la salida de la bomba se conecta al tanque 1.

Aplicando las ecuaciones de balance de flujo se obtienen las ecuaciones no lineales del sistema de tanques [33]

$$\begin{aligned} A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} &= q(t) - C_1 \sqrt{h_1(t)} \\ A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} &= C_1 \sqrt{h_1(t)} - C_2 \sqrt{h_2(t)} \end{aligned} \quad (1)$$

Donde los parámetros C_1 y C_2 vienen dados por $C_1 = A_{d1} \sqrt{2g}$ y $C_2 = A_{d2} \sqrt{2g}$, las áreas transversales de los tanques 1 y 2 se denotan por A_1 , y A_2 . El parámetro A_{d1} se identifica como el área transversal del orificio que comunica el tanque 1 con el tanque 2 mientras que A_{d2} representa la del orificio que comunica el tanque 2 con el repositorio y g es la aceleración de la gravedad. Seleccionando el vector de estado igual a los niveles de líquido de cada tanque, $\mathbf{x}(t) = [h_1(t) \ h_2(t)]^T$, la señal de control al flujo $u(t) = q(t)$ y observando a la salida el nivel de líquido en el segundo tanque $y(t) = h_2(t)$ se puede representar el sistema de tanques a través del modelo no lineal en variables de estado dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -(C_1/A_1)\sqrt{x_1(t)} & 0 \\ (C_1/A_2)\sqrt{x_1(t)} & -(C_2/A_2)\sqrt{x_2(t)} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ &+ \begin{bmatrix} \beta/A_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (2)$$

$$y(t) = [0 \ 1] \mathbf{x}(t)$$

El parámetro β corresponde al coeficiente de flujo de la bomba, su misión es asegurar la conversión entre los Voltios que se aplican en la entrada de la bomba y el flujo de líquido en su salida. Los niveles máximos en cada tanque son de 30 cm. En la tabla 1 se muestran los parámetros físicos del sistema de tanques acompañados de sus valores numéricos.



Figura 1. Sistema de tanques acoplados.

Fuente: Elaboración propia

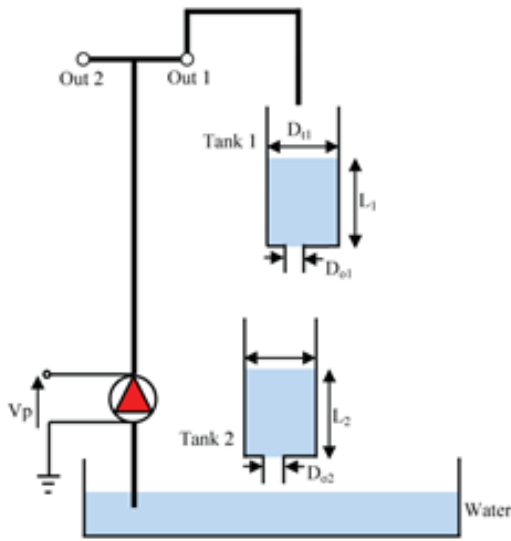


Figura 2. Interconexión habitual de los tanques.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 1. Parámetros físicos del sistema de tanques.

Especificación	Valor
Dimensiones del sistema de tanques	$(30.05) \times (33.7) \times (91.05)$ [cm]
Constante de flujo de la bomba	$4 [cm^3 / (s^{-1}V^{-1})]$
Voltaje pico máximo de la bomba	22 [V]
Diámetro del orificio en la salida 1	0.635 [cm]
Diámetro del orificio en la salida 2	0.476 [cm]
Diámetros de cada tanque	4.445 [cm]

Fuente: Elaboración propia

B. Representación del sistema de tanques como un sistema LPV

Reemplazando los valores numéricos de la tabla 1 en (2), el modelo no lineal en variables de estado queda descrito por la ecuación

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.9\sqrt{x_1(t)} & 0 \\ 0.9\sqrt{x_1(t)} & -0.507\sqrt{x_2(t)} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.26 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (3)$$

$$y(t) = [0 \ 1]x(t)$$

Los niveles de líquido en los tanques se consideran inciertos. Se supone que la condición de operación nominal es en la mitad

del rango posible del nivel de líquido en el sistema de tanques (15 cm) y luego se permiten variaciones de $\pm 50\%$. De esta forma, el rango de variación en los niveles de agua en los tanques corresponde al intervalo

$$x_1, x_2 \in [7.5, 22.5] \text{ cm} \quad (4)$$

Considerando la variación de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dentro del intervalo (4), el modelo no lineal (3) puede caracterizarse de manera exacta a través de un sistema LPV seleccionando el vector de parámetros como $\theta(t) = [\theta_1(t) \ \theta_2(t)]^T = [\sqrt{x_1(t)} \ \sqrt{x_2(t)}]^T$. De esta forma se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + Bu(t) \\ &= \begin{bmatrix} -0.9\theta_1(t) & 0 \\ 0.9\theta_1(t) & -0.507\theta_2(t) \end{bmatrix} x(t) \\ &+ \begin{bmatrix} 0.26 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (5)$$

$$y(t) = Cx(t) = [0 \ 1]x(t)$$

C. Representación politópica del sistema de tanques

Cuando los niveles de los tanques recorren el intervalo (4), los componentes del vector de parámetros varían conforme a $\theta_1, \theta_2 \in [2.74, 4.74]$. De ahí sigue que el vector de parámetros es tal que $\theta(t) \in \Theta$, siendo Θ el espacio paramétrico dado por el producto cartesiano $\Theta = [2.74, 4.74] \times [2.74, 4.74]$. Esto permite representar la matriz $A(\theta)$ por un politopo de cuatro vértices. Esto es, los cambios de la matriz $A(\theta)$ ocurren en el interior del dominio convexo \mathcal{D}_A definido por

$$A(\theta) \in \mathcal{D}_A = \{A(\theta) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i A_i, \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0\} \quad (6)$$

con las matrices vértices $A_i, i = 1, \dots, 4$ obtenidas al evaluar (5) en los valores extremos del intervalo (4), lo que resulta en

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.46 & 0 \\ 2.46 & -1.39 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2.46 & 0 \\ 2.46 & -2.40 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -4.27 & 0 \\ 4.27 & -1.39 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} -4.27 & 0 \\ 4.27 & -2.40 \end{bmatrix}$$

D. Planteamiento del problema

Dado el sistema de tanques acoplado descrito por (3) con variaciones en el nivel de líquido en los tanques dentro del intervalo (4). Determine la señal de control $u(t)$ de manera que el nivel del tanque $y(t)$ siga robusta y asintóticamente con un error de estado estacionario nulo a una señal de referencia $y_r(t)$ predefinida.

iii. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Un resultado conocido de la teoría de control es el principio del modelo interno [34]. El mismo establece que para garantizar el seguimiento de señales de referencia y el rechazo a perturbaciones externas, el modelo del controlador en un sistema realimentado debe poseer un duplicado de la representación dinámica de las señales de referencia y de perturbación. En esta sección, se va a resolver el problema planteado en la sección anterior, aumentando el modelo politópico del sistema de tanques (5) y (6) mediante un modelo interno de la señal de referencia seleccionada. Luego, utilizando desigualdades matriciales lineales, se diseña un controlador que asegure el seguimiento robusto de una señal de referencia predefinida y ciertas especificaciones en la respuesta transitoria a lazo cerrado.

A. Seguimiento robusto de una referencia tipo escalón

Sea el error de seguimiento

$$e(t) = y_r(t) - y(t) \quad (7)$$

Para una entrada de referencia $y_r(t)$ tipo escalón, al calcular la derivada temporal en

(7) y empleando la ecuación de salida de (5) resulta

$$\dot{e}(t) = -C\dot{x}(t) \quad (8)$$

Computando ahora la derivada temporal de la ecuación de estado en (5) y considerando la incertidumbre en el nivel de los tanques a través del politopo (6) se obtiene el sistema incierto aumentado de seguimiento de la referencia escalón dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -C \\ 0 & A_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \dot{u}(t), \quad (9)$$

$$i = 1, \dots, 4$$

La ecuación (9) puede expresarse de manera compacta haciendo $z(t) = [e(t) \ \tilde{x}(t)]^T$ como

$$\dot{z}(t) = A_{a_i} z(t) + B_a \dot{u}(t), i = 1, \dots, 4 \quad (10)$$

donde la influencia de la incertidumbre en el nivel de los tanques (4) se incorpora a través de las matrices A_i con el índice i variando dentro de los diferentes vértices del politopo (6). Para regular el desempeño temporal transitorio del sistema (10), se emplea un resultado de la programación convexa [35], [36], [37], [38] que permite obtener una ley de control por realimentación de estado de la forma $\dot{u}(t) = K_a z(t)$ para fijar los polos a lazo cerrado en el interior de una región LMI deseada $\mathcal{R}(\alpha, \theta, \rho)$ (ver Fig. 3).

Teorema 1: El sistema (10) donde la matriz de estado A_{a_i} pertenece al politopo (6) es estabilizable mediante la ley de control de realimentación de estado $\dot{u}(t) = K_a z(t)$ y los polos a lazo cerrado se localizan en el interior de la región LMI $\mathcal{R}(\alpha, \theta, \rho)$, si y solo si existen una matriz simétrica definida positiva $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y una matriz $R \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ tales que para los vértices $i = 1, \dots, 4$ las siguientes desigualdades matriciales lineales son satisfechas

$$A_{a_i} S + S A_{a_i}^T + B_a R + R^T B_a^T + 2\alpha S < 0 \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho S & A_{a_i}S + B_a R \\ * & -\rho S \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)[\Phi] & \cos(\theta)[\Gamma] \\ * & \sin(\theta)[\Phi] \end{bmatrix} < 0$$

$$\Phi = A_{a_i}S + SA_{a_i}^T + B_a R + R^T B_a^T, \quad (13)$$

$$\Gamma = A_{a_i}S - SA_{a_i}^T + B_a R - R^T B_a^T$$

El vector de ganancia es $K_a = RS^{-1}$.

Si bien las restricciones LMI del problema anterior son complejas de resolver y muy exigentes computacionalmente. Hoy en día, se disponen de aplicaciones que permiten obtener con facilidad una solución numérica del problema. Por ejemplo, utilizando el *Toolbox* LMI de *Matlab* [39], también dentro de *Matlab*, el *Toolbox* YALMIP [40] o el *software* libre *Scilab* de origen francés [41].

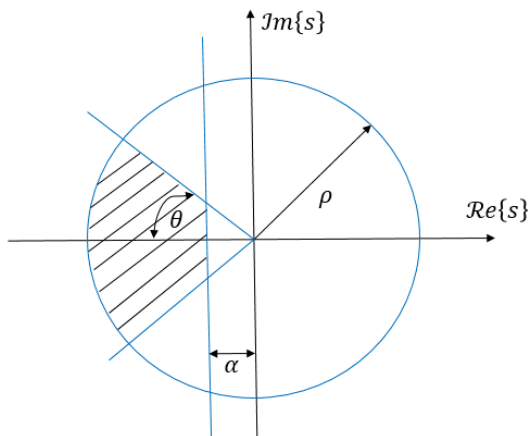


Figura 3. Región LMI $\mathcal{R}(\alpha, \theta, \rho)$ para localizar los polos a lazo cerrado.

Fuente: Elaboración propia

Al aplicar el teorema 1 al sistema (10), se obtiene la ley de control de la ecuación (14). La misma garantiza la localización de los autovalores de la matriz a lazo cerrado ($A_a + B_a K_a$) en el interior de la región LMI de la Fig. 3 y el seguimiento asintótico con error de estacionario cero de cualquier señal de referencia tipo escalón.

$$\dot{u}(t) = K_a z(t) \quad (14)$$

Expresando el vector de ganancia obtenido en (14) como $K_a = \begin{bmatrix} \underbrace{K_1}_{1 \times 1} & \underbrace{K_2}_{1 \times 2} \end{bmatrix}$ resulta la ecuación

$$\dot{u}(t) = [K_1 \quad K_2] \begin{bmatrix} e(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

Integrando en el tiempo (15) origina la señal de control

$$u(t) = K_1 \int_0^t e(\tau) d\tau + K_2 x(t) \quad (16)$$

Los resultados anteriores se resumen en el teorema siguiente.

Teorema 2: Dado el sistema de tanques acoplados (3) con incertidumbre en los niveles de los tanques dentro del intervalo (4), entonces la ley de control (16) puede calcularse a través de las ganancias K_1 y K_2 de manera que la salida controlada $y(t)$ siga robusta y asintóticamente con error de estado estacionario nulo, cualquier entrada de referencia $y_r(t)$ tipo escalón localizando los polos a lazo cerrado del sistema (10) en el interior de la región LMI $\mathcal{R}(\alpha, \theta, \rho)$ de la Fig. 3.

En la tabla 2 se incluye un algoritmo sencillo que destaca los pasos que deben completarse para diseñar el controlador y en la Fig. 4 se ilustra la implementación del sistema de control para el seguimiento robusto de una entrada de referencia tipo escalón en el nivel de agua del sistema de tanques acoplados.

Tabla 2. Algoritmo para diseñar un controlador que garantice el seguimiento robusto del nivel de líquido en un sistema de tanques acoplados.

Input	Modelo matemático del sistema de tanques (3) y rango de variación de los niveles de líquido (4)
Paso 1	Construir el modelo politópico del sistema de tanques (5) y (6)
Paso 2	Definir los parámetros de la región LMI $\mathcal{R}(\alpha, \theta, \rho)$
Paso 3	Computar el vector de ganancia

	de realimentación de estado K_a mediante la resolución del problema LMI formulado en el Teorema 1
Paso 4	Utilizar los componentes del vector K_a para identificar las ganancias

	K_1 y K_2 de la ley de control (16)
Output	Ganancias K_1 y K_2

Fuente: Elaboración propia

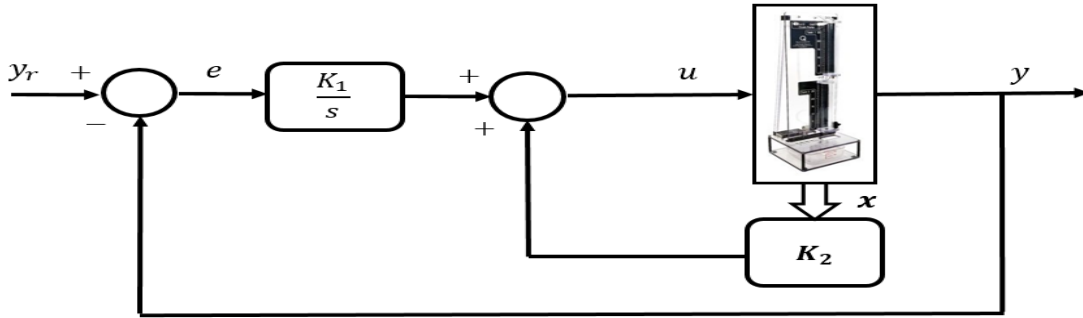


Figura 4. Sistema de control del sistema de tanques acoplados para el seguimiento robusto de una entrada de referencia tipo escalón.

Fuente: Elaboración propia

B. Seguimiento robusto de una referencia tipo rampa

El resultado de la sección anterior puede extenderse sin dificultad para una entrada de referencia tipo rampa derivando dos veces la señal de error (7). En ese caso, la ecuación (9) toma la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \ddot{e}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -C \\ 0 & 0 & A_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \dot{e}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} \ddot{u}(t), \quad (17)$$

$i = 1, \dots, 4$

Luego de aplicar el procedimiento del teorema 1 se obtiene el vector $K_a = \begin{bmatrix} \underbrace{K_1}_{1 \times 1} & \underbrace{K_2}_{1 \times 1} & \underbrace{K_3}_{1 \times 2} \end{bmatrix}$ en la expresión $\ddot{u}(t) = K_a z(t)$ y después de integrar dos veces esta última, resulta la señal de control

$$u(t) = K_1 \iint_0^t e(\tau) d\tau + K_2 \int_0^t e(\tau) d\tau + K_3 x(t) \quad (18)$$

En la Fig. 5 se muestra la implementación del sistema de control para el seguimiento robusto de una señal de referencia tipo rampa

en el nivel de líquido del sistema de tanques acoplados.

iv. RESULTADOS

El método se implementa en tiempo real en el sistema de tanques acoplados localizado en el laboratorio de control de la Universidad Simón Bolívar en Venezuela. El esquema experimental también incluye una computadora Intel Pentium 4 de 1.3 MHz y una interface con LabVIEW mediante la tarjeta de adquisición de datos DAQ-USB-6008 de National Instrument. La misma consta de 8 entradas y 2 salidas analógicas y 12 puertos entrada/salida digitales. El período de muestreo se ajustó en un valor de 50 ms y el diseño de los controladores se llevó a cabo implementado las desigualdades matriciales lineales del Teorema 1 a través del Toolbox LMI de Matlab.

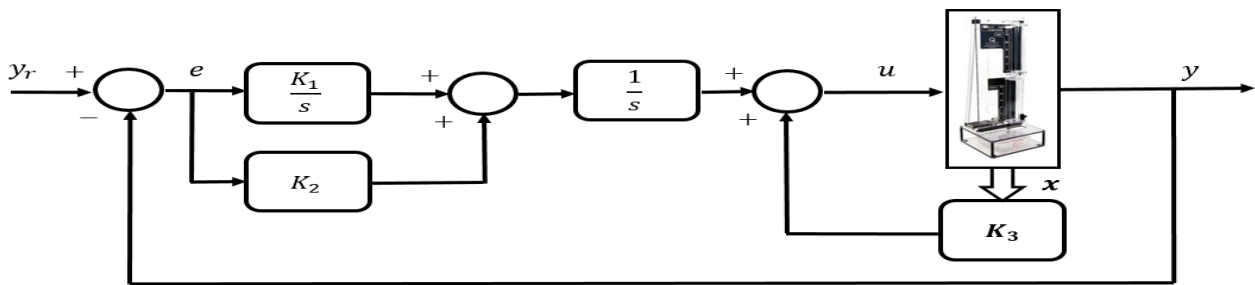


Figura 5. Sistema de control del sistema de tanques acoplados para el seguimiento robusto de una entrada de referencia tipo rampa.

Fuente: Elaboración propia

A. Seguimiento robusto de una referencia tipo escalón

La entrada de referencia aplicada al sistema de tanques aparece en la Fig. 6. Consiste en tres cambios tipo escalón. El primer cambio inicia en un nivel de 7.5 cm, lo que corresponde a una distancia de -50 % con respecto a la operación nominal. Luego, en el instante $t = 60 \text{ s}$ pasa a un valor de 22.5 cm (+ 50 % con respecto a la operación nominal) y en el instante $t = 160 \text{ s}$ se ubica en el nivel de operación nominal. Se seleccionó una región LMI $\mathcal{R}(0.5, \pi/4, 4)$ y luego de aplicar el procedimiento del Teorema 1 se obtuvo la ley de control

$$u(t) = 0.75 \int_0^t e(\tau) d\tau + [2 \quad 5.6]x(t).$$

La Fig. 7 ilustra el buen seguimiento del nivel de agua en el segundo tanque y la Fig. 8 muestra la evolución de la señal de control aplicada a la bomba dentro de los límites de operación (Voltaje pico de la bomba es 22 V, ver Tabla 1).

B. Seguimiento robusto de una referencia tipo rampa

Se considera la misma región LMI utilizada previamente para efectuar el diseño del controlador robusto. La ley de control que resulta después de aplicar el teorema 1 es

$$u(t) = 4.74 \int_0^t e(\tau) d\tau + 22.46 \int_0^t e(\tau) d\tau + [7.62 \quad 49.60]x(t).$$

La Fig. 9 muestra el seguimiento de una señal de referencia compuesta de dos rampas, una con pendiente positiva y la otra con pendiente negativa. La primera coloca al sistema en un nivel de 25 cm (más allá de la variación de + 50 % considerada en el diseño) y la segunda ubica el nivel del tanque en la posición nominal de operación. En la Fig. 10 aparece como fluctúa la señal de control.

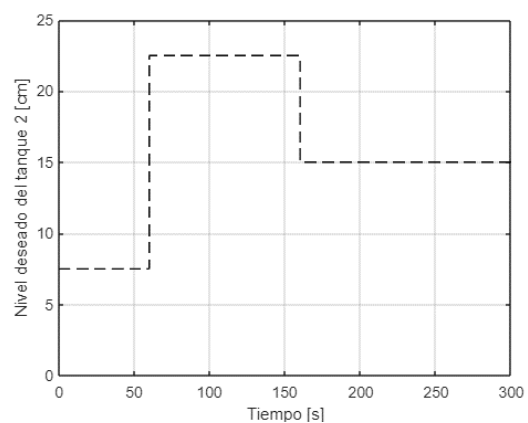


Figura 6. Señal de referencia deseada para el nivel de agua en el tanque 2.

Fuente: Elaboración propia

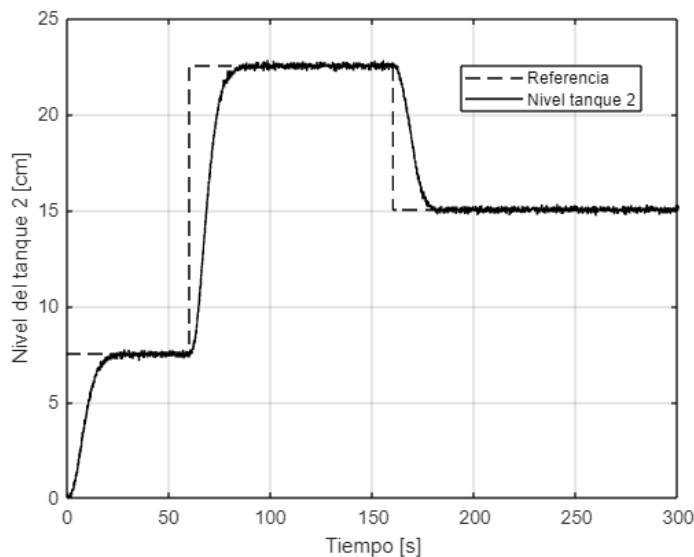


Figura 7. Evolución del nivel de agua en el tanque 2.

Fuente: Elaboración propia

C. Rechazo a perturbaciones

A continuación se evalúa la capacidad de rechazo a perturbaciones del método propuesto. A ese fin, se considera el controlador diseñado en la sección (4.A) y se permite que el sistema alcance el nivel de operación nominal; posteriormente se simula una perturbación a través del experimento siguiente. El sistema de tanques inicia su operación conectado a través de la configuración estándar presentada en la Fig. 2 y se le permite alcanzar su nivel nominal, en el instante $t = 100\text{ s}$ se adopta la interconexión esquematizada en la Fig. 11, aquí la salida de la bomba alimenta a ambos

tanques, luego en el instante $t = 200\text{ s}$ se regresa al esquema de interconexión previo. Este experimento modela una perturbación con forma de trapecio que opera en el intervalo de tiempo entre 100 y 200 segundos, ocasionando la disminución del flujo que ingresa al primer tanque y la aparición de un flujo directo en el segundo. En la Fig. 12 puede apreciarse como el sistema responde en forma satisfactoria, evidenciando adicionalmente que si el controlador tiene un modelo (polo en $s = 0$) de la señal tipo escalón (referencia o perturbación) el sistema de control garantizará tanto seguimiento como rechazo a perturbaciones.

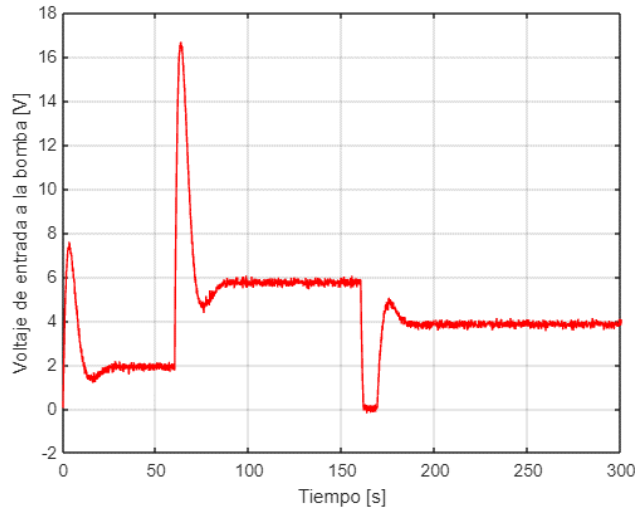


Figura 8. Variación de la señal de control.

Fuente: Elaboración propia

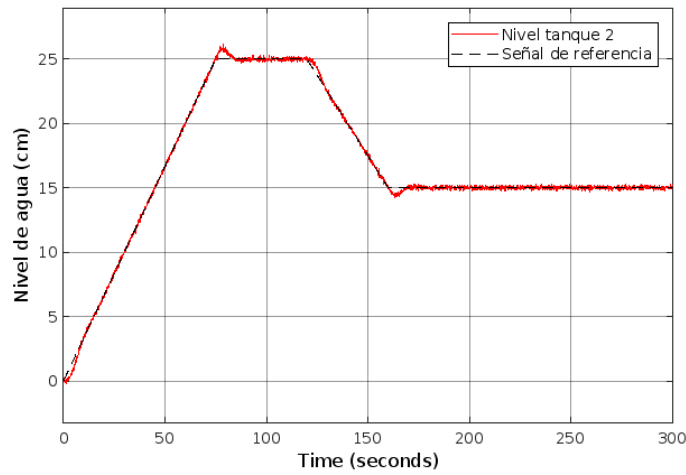


Figura 9. Evolución del nivel de agua en el tanque 2.

Fuente: Elaboración propia

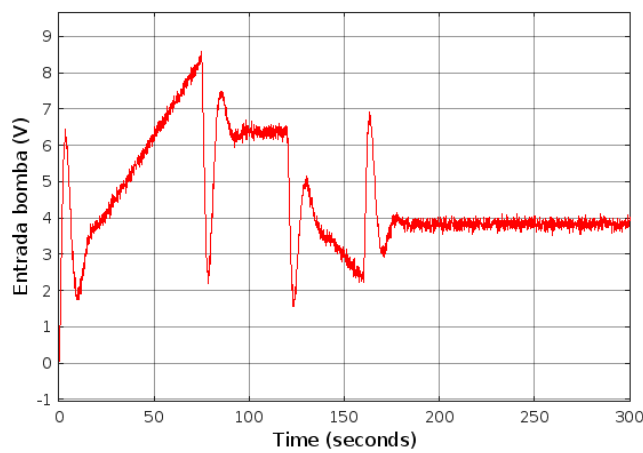


Figura 10. Variación de la señal de control.

Fuente: Elaboración propia

D. Comparación con un controlador PID

El último experimento consiste en comparar el desempeño del controlador robusto diseñado en la sección (4.A) con un controlador PID con mecanismo de anti embalamiento (anti *windup*) que ha sido diseñado empleando técnicas convencionales suponiendo que el sistema se encuentra en el punto de

operación nominal [42]. La Fig. 13 ilustra el desempeño de ambos controladores. Puede apreciarse que el controlador PID suministra una respuesta mucho más rápida pero presenta un sobre pico muy elevado que resulta inaceptable en aplicaciones de control de nivel.

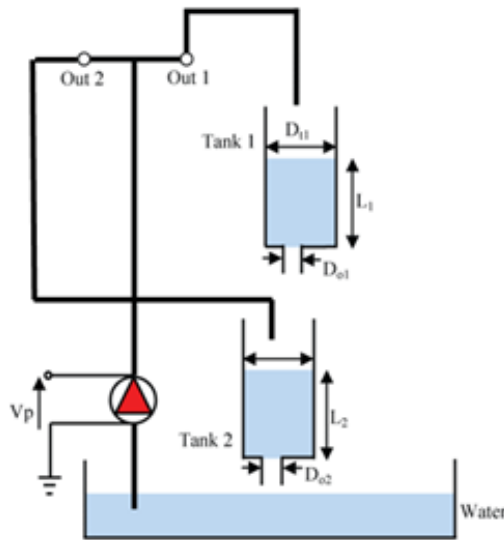


Figura 11. Interconexión modificada del sistema de tanques para implementar una perturbación.

Fuente: Elaboración propia

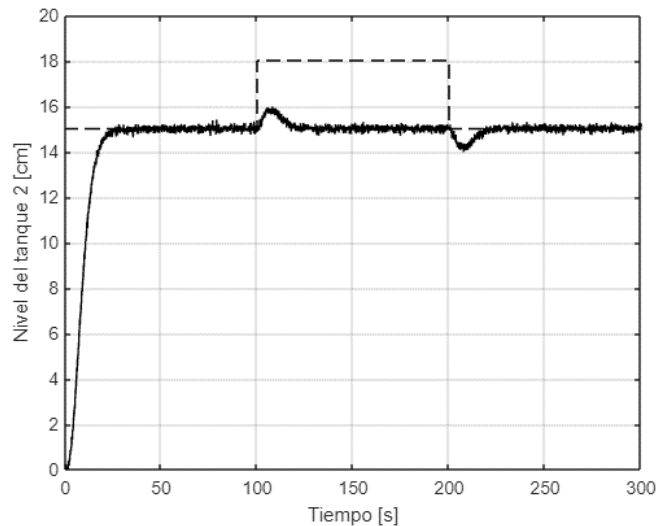


Figura 12. Evaluación de la capacidad de rechazo a perturbaciones del método.

Fuente: Elaboración propia

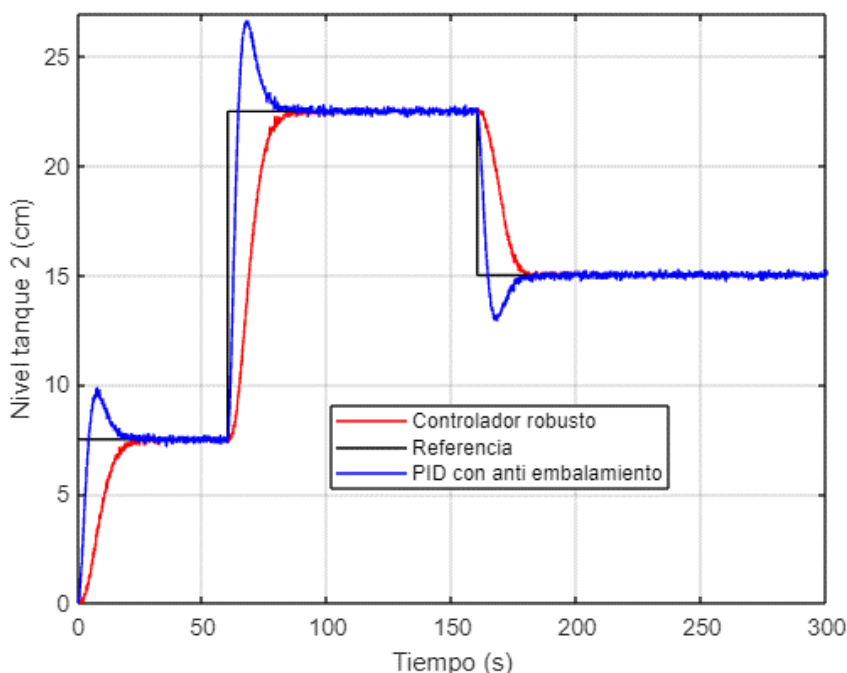


Figura 13. Comparación entre el controlador robusto y un controlador PID convencional.

Fuente: Elaboración propia

v. CONCLUSIONES

El método propuesto para alcanzar el seguimiento robusto del nivel de líquido en un sistema de tanques acoplados tuvo un desempeño muy satisfactorio como evidenciaron las diferentes pruebas a las que fue sometido. No solo en la resolución del problema de seguimiento sino también en el rechazo a perturbaciones externas. Si bien el método se adaptó para el sistema de tanques, sus principios de base pueden aplicarse en otros sistemas. De igual forma, la metodología puede extenderse a otras señales de referencia y podrían incorporarse otros criterios de robustez como la optimización \mathcal{H}_2 o \mathcal{H}_∞ .

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo brindado por el Programa de Investigación de la Universidad Metropolitana en Caracas, Venezuela a través del proyecto número PI-A-13-21-22.

REFERENCIAS

- [1] S. K. Chakraborty, N. Manna, S. Dey, (2014). Importance of three-element boiler drum level control and its installation in power plant, *International Journal of Instrumentation and Control Systems*, vol. 4, n. 2 pp. 1-12, 2014.
- [2] D. E. Seborg, T. F. Edgar, D. A. Mellichamp, F. J. Doyle III, (2016). *Process dynamics and control*. John Wiley & Sons.
- [3] W. C. Dunn, (2018). *Fundamentals of industrial instrumentation and process control*. McGraw-Hill Education.
- [4] K. H. Johansson, (2000). The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero, *IEEE Transactions on control systems technology*, vol. 8, n. 3, pp. 456-465.
- [5] R. Bieda, M. Blachuta, R. Grygiel, (2017). A new look at water tanks systems as control

- teaching tools”, *IFAC - PapersOnLine*, vol. 50, n. 1, pp. 13480-13485.
- [6] J. N. Bruno, F. D. Moran, H. I. Khajanchi, A. A. Adegbege, A. A., (2021). Analog Solver for Embedded Model Predictive Control with Application to Quadruple Tank System”, *American Control Conference (ACC)*.
- [7] D. L. Mute, S. R. Mahapatro, K. K. Chaudhari, (2016). Internal model based PI controller design for the coupled tank system: an experimental study, *IEEE First International Conference on Control, Measurement and Instrumentation (CMI)*. pp. 72-76.
- [8] G. Stohy, M. S. Abbas, H. M. El-Sayed, G. Abo El-Maged, (2020). Parameter estimation and PI control for a water coupled tank system, *Journal of Advanced Engineering Trends*, vol. 38, n. 2, pp. 147-159.
- [9] A. Başçi, A. Derdiyok, (2016). Implementation of an adaptive fuzzy compensator for coupled tank liquid level control system, *Measurement*, vol. 91, pp. 12-18.
- [10] F. Chabni, R. Taleb, A. Benbouali, M. A. Bouthiba, M. A. (2016). The application of fuzzy control in water tank level using Arduino”, *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, vol. 7, n. 4.
- [11] P. Roy, B. K. Roy, (2016). Fractional order PI control applied to level control in coupled two tank MIMO system with experimental validation”, *Control Engineering Practice*, vol. 48, pp. 119-135.
- [12] P. Teppa-Garran, M. Bravo, G. Garcia, (2012). Control por rechazo activo de perturbaciones del nivel de líquido de un sistema de tanques acoplado, *Revista Faraute de Ciencia y Tecnología*, vol. 7, n. 1, pp. 10 – 18.
- [13] P. Teppa-Garran, G. Garcia, (2017). Design of an optimal PID controller for a coupled tanks system employing ADRC, *IEEE Latin America Transactions*, vol. 15, n. 2, pp. 189-196.
- [14] J. Dai, B. Ren, Q. C. Zhong, (2018). Uncertainty and disturbance estimator-based backstepping control for nonlinear systems with mismatched uncertainties and disturbances, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 140, n. 12.
- [15] J. Berberich, J. Köhler, M. A. Müller, F. Allgöwer, (2021). Data-driven model predictive control: closed-loop guarantees and experimental results, *Automatisierungstechnik*, vol. 69, n. 7, pp. 608-618.
- [16] J. Esmaili, A. Basci, (2021). Design and implementation of LMI based \mathcal{H}_2 control for nonlinear coupled tank system, *International Journal of System Dynamics Applications*, vol. 10, n. 4, p. 16.
- [17] K. K. Ayten, A. Dumlu, A. (2021). Implementation of a PID Type Sliding-Mode Controller Design Based on Fractional Order Calculus for Industrial Process System, *Elektronika ir Elektrotechnika*, vol. 27, n. 6, pp. 4–10.
- [18] Y. Fu, W. Chen, J. Fu, (2022). A New Optimal Tracking Controller of Linear Strongly Coupled Systems and Its Applications”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 69, n. 3, pp. 1387-1391.
- [19] P. Teppa-Garran, (2022). Optimal tracking of the water level for a coupled tank system using Linear Quadratic Regulator, *Tekhné*, vol. 25, n. 3, pp. 74-82.
- [20] G. P. Liu, S. Daley, (2001). Optimal-tuning PID control for industrial systems”, *Control Engineering Practice*, vol. 9, n. 11, pp. 1185-1194.
- [21] O. J. Douglas, (2019). *Instrumentation fundamentals for process control*. Routledge.

- [22] P. Teppa-Garran, (2008). Robust control of a linear parameter varying system: A LMI approach”, *Revista de la Facultad de Ingeniería Universidad Central de Venezuela*, vol. 23, n. 1, pp. 5-17.
- [23] J. Mohammadpour, C. W. Scherer (Eds.), (2012). *Control of linear parameter varying systems with applications*. Springer Science & Business Media.
- [24] M. M. Quadros, I. V. de Bessa, V. J. Leite, R.M. Palhares, (2020). Fault tolerant control for linear parameter varying systems: An improved robust virtual actuator and sensor approach, *ISA transactions*, vol. 104, pp. 356-369.
- [25] E. Alcalá, V. Puig, J. Quevedo, U. Rosolia, (2020). Autonomous racing using linear parameter varying-model predictive control”, *Control Engineering Practice*, vol. 95.
- [26] J. C. Geromel, P.L. Peres, J. Bernussou, (1991). On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems”, *SIAM J. on Cont. Opt.* vol. 29, pp. 381-402.
- [27] V. Veselý, L. Körösi, (2019). Robust PI-D controller design for uncertain linear polytopic systems using LMI regions and \mathcal{H}_2 performance, *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 55, n. 5, pp. 5353-5359.
- [28] V. Da Silva, A. Nguyen, R. Palhares, (2021). Adaptive gain-scheduling control for continuous-time systems with polytopic uncertainties: An LMI-based approach”, *Automatica*, vol. 133.
- [29] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Society for industrial and applied mathematics.
- [30] G. Herrmann, M. C. Turner, I. Postlethwaite, (2007). *Linear matrix inequalities in control. Mathematical methods for robust and nonlinear control*. Springer, London.
- [31] G. R. Duan, H. H. Yu, H. H. (2013). *LMIs in control systems: analysis, design and applications*. CRC press.
- [32] B. T. Polyak, M. V. Khlebnikov, P. S. Shcherbakov, (2014). *Control of linear systems with external disturbances: LMI Technique*, Moscow: LENAND.
- [33] J. Apkarian, H. Lacheray, A. Abdossalami, (2013). *Instructor Workbook: Coupled Tanks Experiment for Matlab/Simulink Users*. Quanser Inc. Canadá.
- [34] J. Zhou, L. Feng, H. Qian, Z. Shao, (2021). Further Results about the Internal Model Principle and Trajectory Tracking Control in Linear Dynamical Systems”, *40th Chinese Control Conference (CCC)*, pp. 7-12.
- [35] M. Chilali, P. Gahinet, P. Apkarian, (1999). Robust pole placement in LMI regions. *IEEE transactions on Automatic Control*, vol. 44, n. 12, pp. 2257-2270.
- [36] P. Teppa, (2003). *Commande par séquençement de gains robustes pour systèmes non lineaires* (Doctoral dissertation, Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France).
- [37] D. Rosinová, M. Hypiusová, (2019). LMI pole regions for a robust discrete-time pole placement controller design, *Algorithms*, vol. 12, n. 8.
- [38] B. Sereni, M. A. Beteto, E. Assunção, M. C. Teixeira, (2022). Pole placement LMI constraints for stability and transient performance of LPV systems with incomplete state measurement”, *Journal of the Franklin Institute*, vol. 359, n. 2, pp. 837-858.
- [39] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. Laub, M. Chilali, (1995). *LMI Control Toolbox User's Guide*. The Mathwork Partner Series.

- [40] J. Lofberg, (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB”, *2004 IEEE international conference on robotics and automation*, (IEEE Cat. No. 04CH37508), pp. 284-289.
- [41] M. Baudin, V. Couvert, (2010). *Optimisation in Scilab*. Consortium Scilab. Francia.
- [42] K. Åström, T. Hagglund, (1995). *PID controllers: Theory, design and tuning*. NC: Instrument Society of America, Research Triangle Park.