



UN ESQUEMA GUÍA SOBRE LAS FORMAS CUADRÁTICAS EN LA INGENIERÍA ESTRUCTURAL.

■ Mario Paparoni

email: mpaparoni@unimet.edu.ve

Profesor Titular de las Escuelas de Ingeniería Civil.

UNIMET y UCAB.

Caracas, Venezuela

RESUMEN

El autor de este breve artículo quiere referirse a ciertas consideraciones sobre principios de la Ingeniería Estructural y sobre metodologías que fueron muy útiles en el pasado (Siglo XIX y parte del Siglo XX) y que, en investigaciones recientes, utilizando trabajos especiales de grado, han demostrado su validez en el proceso de optimización flexotorsional de estructuras de edificios. El haber seguido esta vía de investigación ha podido revelar nuevas posibilidades de empleo de esas viejas ideas, pero esta vez utilizando las enormes posibilidades de trabajar con

Fecha de Recepción: 18 de Enero 2015
Fecha de Aceptación: 2 de Septiembre de 2015

modelos estructurales virtuales para desarrollar metodologías de optimización utilizables en la praxis estructural moderna. En cierta forma, se ha podido encontrar que las viejas vías geométricas todavía tienen cabida en el pensamiento estructural moderno

Comencemos con los postulados que hace ya mucho tiempo, aparecían al comienzo de todo texto de Análisis estructural, antes del desarrollo y uso masivo del Cálculo Matricial de Estructuras y de la aparición de programas de análisis y diseño comprensivos.

I. Postulados de partida de las disciplinas Estructurales en la Ingeniería:

Todos estos principios se aplican sólo al Análisis Lineal de Estructuras Estables; no necesariamente aplican a los que hoy se llaman Análisis no-lineales, en los cuales hay dos tipos de no linealidad: a) Conducta no lineal de los materiales estructurales; b) Deformaciones notables bajo cargas, de carácter no-lineal. Ambas causales pueden inducir inestabilidades inesperadas.

Todas las disciplinas estructurales lineales, entonces, presumen que las siguientes afirmaciones son ciertas o pueden considerarse como ciertas

- **La Ley de Betti:** implica que el orden de aplicación de las cargas no influye en el resultado final de los cálculos
- **La Ley de Maxwell:** implica que las Matrices de Rigidez y de Flexibilidad de las estructuras que tratamos son siempre cuadradas y simétricas. Visto de otro modo: Si transponemos los puntos de aplicación de las fuerzas y los puntos de medición de las deformaciones, sin cambiar las magnitudes de las fuerzas, los resultados son idénticos pero transpuestos (simetría de las matrices estructurales de rigidez y de flexibilidad).
- **El Teorema de Castigliano** (Coincide con las Leyes de Gibbs de la Termodinámica): Las

soluciones de Equilibrio son únicas y corresponden al mínimo de la Energía Libre del Sistema Estructural.

- **Presunción de Estabilidad:** Se presume que las estructuras que construyamos serán estables (Las cónicas asociadas a las formas cuadráticas serán reales y cerradas. (Elipses y Elipsoides). En la práctica se suelen verificar solamente las estabildades locales de miembros que puedan ser críticos en este aspecto. No es usual la verificación de estabildades globales.

- **Principio de Afinidad:** la afinidad se presenta entre las funciones de carga y las funciones de respuesta, en toda estructura con respuestas lineales. Podríamos añadir a lo dicho anteriormente la constatación, sea por vía heurística, sea por un análisis comparativo entre los sistemas de ecuaciones lineales que se utilizan hoy para el cálculo de estructuras, y las ecuaciones de la Geometría Analítica que nos describen las Transformaciones Afines, con el análisis de las matrices estructurales a través de operaciones con símbolos (no con números), el que existe este principio: **“En toda estructura con respuestas lineales, existen siempre afinidades entre las funciones de carga y las funciones de respuesta”**. Son ejemplos de ello cosas como éstas: Si se toma como función de carga una fuerza constante rotante (su envolvente es una circunferencia) la respuesta afín viene dada por Elipses de Momentos, Círculos de Axiales, Elipses de Deformaciones, Elipses de Rigidez. Elipses de Flexibilidad, Elipses de Radios de Giro, Elipses de Culmann, etc., No puede haber respuestas Parabólicas o Hiperbólicas a menos que las cargas tengan como envolventes parábolas o hipérbolas. Las transformaciones afines entre cónicas sólo producen cónicas de la misma especie.

- **Funciones de la Energía Elástica:** como en el caso de representar la “Superficie de Energía” que describa, por ejemplo, la energía de un sistema elástico lineal sujeto a flexotorsión (una planta diafragmada) en

función de las posiciones de su centro de rigidez, no tendremos soluciones necesariamente afines, surgen en este caso superficies cuadráticas. Paraboloídes Elípticos o Circulares, Cilindros Parabólicos, Paraboloídes hiperbólicos, es decir, todas son concoides, pero no son figuras afines, y ellas describen con mucha eficiencia las posibles condiciones de inestabilidad elástica de sistemas estructurales con respuestas lineales. Puede haber en esas funciones mínimos estables o inestables. [1]. Muchas veces nos olvidamos de estos puntos de partida cuando desarrollamos, por ejemplo, algoritmos de análisis y diseño. A veces la linealidad no se aplica sino a las deformaciones (Hipótesis de Navier), como ocurre con los llamados Cálculos por estados límites (Diagramas de interacción)

II. Origen Histórico de estos conceptos

Se puede admitir que la mayoría de los principios de partida del Análisis Estructural nacieron o fueron desarrollados en Europa, en el último cuarto del Siglo XIX y en pocas ciudades relativamente cercanas entre sí, situadas en lo que hoy día son Alemania, Austria, Francia, Italia y Suiza. Inglaterra produjo más bien las soluciones Matemáticas (Matrices) Los Estados Unidos fueron siempre mucho más pragmáticos que Europa y sus desarrollos miraban más a las soluciones prácticas e implementables de inmediato. Hubo sí interacciones mutuas (Culmann estuvo en USA por un tiempo). La primera mitad del Siglo XX produjo una inmensa cantidad de desarrollos algorítmicos y metodologías de cálculo que llegaron a opacar totalmente sus puntos de partida. El Siglo XXI deberá probablemente ocuparse de convertir

toda esta masa de conocimientos en lo que hoy llamamos Ataque Sistemático de los Problemas, como inicialmente lo fueron los Métodos Estructurales, incluyendo en ellos a la llamada Elipse de Culmann, la cual determina directamente los centros instantáneos de giro.

III. Formas de resolver los Problemas

Inicialmente, y hasta ya bien entrado el siglo XX, El instrumento fundamental para la solución de los problemas estructurales fué la Geometría, en sus formas de Estática Gráfica y Aplicación de la Elipse de Elasticidad. Luego llegó el predominio, en la enseñanza universitaria de la Ingeniería, de lo que hoy llamamos Cálculo o Análisis Matemático sobre La Geometría y el Álgebra Lineal, ello condenó al olvido los métodos geométricos, muchos de ellos basados en la Geometría Proyectiva. La Computación por ordenadores le dió finalmente el tiro de gracia a los métodos Sintéticos, reemplazándolos casi totalmente por métodos analíticos. Hoy día vemos vemos cómo el “Know-How” ha sido reemplazado por el “Know-With” y por el “How much” y por los colorines en lugar de los números.

IV. Versiones modernas “análogas” de la Elipse de Elasticidad

Esporádicamente han aparecido métodos como el de la la “Columna Equivalente”. Usada en los años 50 para resolver pórticos monovanos (Cruces carreteros en desnivel). Difíciles de tratar con otros métodos de ese entonces debido al frecuente empleo de “Pórticos” cuyos componentes no podían simularse como miembros rectilíneos de sección constante, Otras: El Círculo de Mohr (Un método

analógico de representación de las funciones cuadráticas). Los Diagramas de Williot-Mohr (son añejos) y los métodos de las “láminas cinemáticas” que trabajaban con “centros instantáneos de rotación tal como lo hace la Elipse de Culmann.

V. Variantes modernas ocultas de las formas Cuadráticas:

Todas las Matrices de Flexibilidad y de rigidez de cada estructura que calculemos contiene formas cuadráticas Nodales (elipsoides), cuando las estructuras sean lineales y estables. Este hecho fué mostrado claramente a través de varios trabajos especiales de grado realizados en la Unimet y en la UCAB [2]. Por otra parte, cuando uno estudia el libro [3], resulta claro el que toda forma Cuadrática tiene un Elipsoide asociado, en espacios n-dimensionales. O dicho de otro modo, todo sistema lineal tiene una forma cuadrática asociada a la energía potencial que puede almacenar bajo carga.

VI. Regularidades sistémicas en las funciones de respuesta estructural en edificios analizados con esquemas de cálculo aplicables al diseño sismorresistentes:

En un trabajo llevado al 12wcee por M. Paparoni y Daniela Chacón, basado en un TEG de la Universidad Metropolitana [4] se demostró que todos los resultados de Momentos de diseño aplicables a secciones de columnas de edificios, aún siendo irregulares en configuración, conforman Elipses en el espacio (y su proyección en el plano). Esto es una simple consecuencia del

principio de Afinidad entre las solicitaciones (fuerzas rotantes constantes o con envolventes elípticas producen, a su vez solicitaciones y deflexiones locales afines. Igual ocurre con las axiales (se generan círculos dobles). Esto se Demostró con los TEG de Taucer y Colvee [5], Müller y Saénz [6]. Igual situación con los núcleos centrales de secciones de vigas, derivados de relaciones de polaridad entre puntos del contorno de la sección y la Elipse de Elasticidad de la misma (Elipse de Culmann). El requisito Normativo actual utilizar ocho (o doce) direcciones de carga diferentes en el cálculo de un edificio, admitiendo una correlación entre dos direcciones sísmicas perpendiculares, es lo mismo que decir que deben aplicarse solicitaciones “elípticas” como se ha mencionado anteriormente, y por razones distintas.

VII. Consideraciones de Análisis Dimensional

Si nos atenemos al Análisis Dimensional solamente, llegamos a la conclusión de que la elipse más útil derivable directamente de la elipse de deflexiones de una planta es la Elipse de Culmann (Elipse de Radios de Giro transpuesta) por ser la única, aparte de la elipse de deflexiones, que tiene dimensiones de longitud. Se deriva del Cociente entre la Rigidez Angular de la planta entre cada una de las rigideces lineales principales. Puede anotarse también aquí que los Óvalos de Booth (haricots) (Llamados también Hippopede de Proclus) son la inversa Geométrica de una elipse, o también, son la misma cosa expresada en dos juegos de coordenadas polares, en una de las cuales se usan como acimuts los ángulos de las fuerzas (Booth) y en otra, los ángulos de las deflexiones. Dicho de otro modo, los ángulos

tienen desfase variables.

VIII. Argumentos de origen bibliográfico reciente

El libro “Linear Algebra and Projective Geometry” por Reinhold Baer [7] demuestra el perfecto paralelismo entre la Geometría Proyectiva y la Geometría Analítica. Concluye que las transformaciones afines son las únicas que pueden ocurrir dentro de los procesos de cálculo estructural, conclusión a la cual se llega por la inspección de los correspondientes sistemas de ecuaciones lineales que se plantean.

En el Trabajo publicado en la Revista Tekhnè 2000 por M. Paparoni y P. Hummelgens [1] se muestra el “Elipsoide de Energía” que se genera al cambiar de posición los centros de rigidez de una planta. Ese Elipsoide contiene, en distinta forma, algunas de las Elipses que hemos utilizado en trabajos en TEG recientes

El trabajo de grado de Oscar Peña y Osdaly Paz, presentado el 25/03/2011 [8] en la Universidad Católica Andrés Bello, logró comprobar la validez de la Elipse de Culmann (Elipse de Radios de Giro Transpuesta) como perfecto predictor de los centros de giro instantáneos de una planta sometida a cargas que no pasen o no por el centro de Giro, así como a la predicción de los factores de Amplificación Torsional para varios tipos de plantas y orientaciones de pórticos. Este TEG corrigió algunas incongruencias de TEG anteriores realizados en la UNIMET y la UCAB y completó sus conclusiones al comprobarlas heurísticamente.

IX. Epílogo

Se puede concluir que todas las afirmaciones que se han hecho en estos escritos se hubiesen podido alcanzar sin ninguna de las bases teóricas anteriores a través de un proceso de inferencia basado en una serie de experimentos con el SAP o con el ETABS o con cualquier otro programa moderno validado. El único problema hubiera sido el tener que buscar algo sin tener la menor idea de lo que se busca. Probablemente hubiésemos tenido que resolver unas cuantas docenas o centenares de casos para ver que regularidades se presentan en los patrones de respuesta.

Hay otras consideraciones sobre los Autovalores y las Autofunciones de una Elipse o un Elipsoide (sus semiejes principales y la elipse misma) que respaldan las secuencias de generación de las Elipses Estructurales sucesivas y la permanencia de las orientaciones de los mismos en las sucesivas etapas.

Este artículo meramente pretende explicar que puede haber nuevos principios adicionales en las disciplinas estructurales, y por tanto no se dan los detalles que interesan a un especialista, lo cual se hará posteriormente en publicaciones especializadas o en Congresos Temáticos que les correspondan.

REFERENCIAS

- [1] Mario Paparoni y Peter Hummelgens. "Un Tratamiento Matemático de la Rigidez Torsional de una Planta de Edificio con Pórticos en Direcciones Arbitrarias. UCAB. Revista TEKHNÉ N°4 2000.
- [2] Osteicoechea, A. y Paparoni, M. 2006, Formas cuadráticas en el análisis estructural. Trabajo Especial de Grado UCAB.
- [3] Cornelius Lanczos, Applied Analysis. Dover Publications Inc. NY. 1988 reprint of the 1956 Edition
- [4] Chacón, D. y Paparoni, M. 2000, Trabajo Especial de Grado UNIMET.
- [5] Taucer, Colvee y Paparoni. 2010, Trabajo Especial de Grado UCV
- [6] Müller, Saénz y Paparoni. 2010, Trabajo Especial de Grado UCV
- [7] Reinhold Baer, Linear Algebra and Projective Geometry. Dover Publications Inc. Mineola, New York. 2005, reprint of the 1952 edition.
- [8] Peña, O., Paz, O. y Paparoni, M. 2011, Configuraciones Estructurales Extremas. Una búsqueda de Variables Sistemáticas Deinitorias, las Elipses Plantares. Trabajo Especial de Grado UCAB