

# INFLUENCIA DE LA DEPENDENCIA DE ACTIVIDADES EN EL TIEMPO DE TERMINACIÓN DE UN PROYECTO: UN CASO DE ESTUDIO

## Resumen

Un área de aplicación de los modelos de redes es la planificación, programación y gestión de proyectos. Cuando las actividades que componen el proyecto tienen duraciones conocidas y determinísticas existe una técnica conocida para calcular la duración total del proyecto. Para ello se aplica la técnica del camino crítico (CPM por sus siglas en inglés). Cuando las actividades del proyecto tienen duraciones inciertas se calcula su duración por medio de la "Técnica de revisión y evaluación de programas" (PERT por sus siglas en inglés). Sin embargo la metodología que se acostumbra utilizar cuando hay incertidumbre en las duraciones de las actividades conduce, con frecuencia, a errores en la estimación de la duración del proyecto, pues deja a un lado el hecho que el resultado final es una distribución de frecuencias.

Otro supuesto que se suele hacer es que las actividades tienen duraciones independientes.

Este trabajo muestra un caso de estudio sobre el tipo y magnitud de los errores de estimación de la duración de un proyecto cuando la duración de las actividades es estocástica y dependiente. El procedimiento seguido hace uso de la simulación de eventos discretos para representar la duración de las actividades y su relación de dependencia. La conclusión es que los resultados que se obtienen dependen de los supuestos que se hagan en el modelo de redes del proyecto y afecta la estimación de la duración del proyecto.

■ César Pérez

email: ceperez@ucab.edu.ve

■ Luis Gutiérrez

email: laglab@cantv.net

Escuela de Ingeniería Industrial,  
Facultad de Ingeniería, Universidad Católica "Andrés Bello"

Fecha de Recepción: 23 de mayo de 2008

Fecha de Aceptación: 13 de enero de 2009

## Abstract

Project planning, programming and management is an application area of network models. In the case of known and deterministic activity duration, CPM (Critical Path Method) provides a well-known technique to calculate the project duration. When activity duration is stochastic, PERT (Program Evaluation and Review Technique) is a useful method to provide preliminary insight into the project duration.

However, this last method frequently leads to errors in estimating the project duration, as it overlooks the fact that the end result is a frequency distribution of the project duration.

Another, often used, assumption is that activities have independent durations.

This case study shows the types of errors made in estimating a project duration when activity duration is stochastic and dependent. The procedure followed uses discrete-event system simulation to represent the network of activities, their durations and dependence relationships. The main conclusion is that the results obtained on project duration are dependent on the assumptions made.

## 1. Introducción

Un proyecto consiste en un conjunto de actividades interrelacionadas que requieren tiempo y recursos, dirigidas a alcanzar un propósito específico. Por ejemplo: la construcción de un edificio, o la dotación de equipos para un laboratorio.

Los modelos de redes se han utilizado exitosamente para predecir la duración de proyectos. Cuando los tiempos son determinísticos se puede conocer la duración total del proyecto, en función de la duración de las actividades que lo componen y de las relaciones de precedencia entre ellas. Este es el fundamento del método de la ruta crítica (CPM por sus siglas en inglés).

Sin embargo, cuando las duraciones de las actividades son estocásticas, la duración del proyecto se expresa en términos estadísticos por su función densidad. La técnica de Evaluación y Revisión de Programas (PERT por sus siglas en inglés) tiene como propósito conocer la función de densidad de la duración de un proyecto.

El objetivo de ambas técnicas es ayudar en la planificación, programación y control de proyectos.

A pesar de la notable contribución de estas técnicas a la planificación, programación y control de proyectos, con frecuencia se sobresimplifica la red de actividades, sustituyendo la función de densidad que representa la duración de cada actividad por su valor esperado; con ello se convierten las duraciones estocásticas en determinísticas, y se encuentra una respuesta a la pregunta sobre la duración total del proyecto. Otra simplificación frecuente es suponer que las duraciones de las actividades son independientes. En ambos casos no hay pronósticos exactos y la estimación de la duración de un proyecto presenta distintos resultados.

Este estudio exploratorio se hizo con el propósito de indicar la contribución de la simulación de eventos discretos a representar modelos de redes de proyectos y así estimar con mayor expectativa de precisión su duración.

## 2. Duración de las actividades

Cuando se consideran duraciones estocásticas de las actividades, se acostumbra expresarlas mediante una distribución de probabilidades, definida por la tendencia central y dispersión. Las medidas más utilizadas son la media y la desviación estándar.

Es frecuente encontrar la simplificación de suponer, sin prueba de ello, que la distribución de datos que representa más adecuadamente la duración de una actividad es una distribución Beta [3]. En otros casos se advierte que el supuesto de que la duración de las actividades sigue una distribución Beta es cuestionable y puede conducir a errores del 10% para la estimación de la duración del proyecto [2], pero no se presenta una alternativa de solución a este planteamiento.

## 3. Enfoques para conocer la duración del proyecto cuando la duración de las actividades es estocástica.

Un enfoque consiste en estimar el valor esperado de la duración de las actividades y resolver la red por el método CPM. Se ha sugerido [3] [4] utilizar la distribución Beta para estimar el promedio de la duración de una actividad y resolver la red con los valores promedio. Otra distribución muy utilizada es la triangular.

El método de estimación consiste en indicar tres valores característicos de la distribución beta:

Pesimista (a), más probable (m) y optimista (b).

Con esos valores se calcula el promedio y la desviación estándar de la distribución beta, mediante las fórmulas:

$$\mu = (a + 4m + b) / 6$$

$$\sigma = (b - a / 6)$$

Para la distribución triangular el enfoque es similar, las fórmulas para calcular el promedio y la varianza son:

$$\mu = (a + m + b) / 3$$

$$\sigma^2 = (a^2 + m^2 + b^2 - ma - ab - mb) / 18$$

Un segundo enfoque es utilizar simulación de Montecarlo para tomar muestras de la duración de cada actividad y resolver el proyecto muchas veces con el valor determinístico tomado de la muestra. Al repetir este procedimiento un gran número de veces se obtendrá una distribución de frecuencias con los valores observados de la duración del proyecto.

#### 4. Objetivos

Este trabajo se plantea comparar los resultados que se obtendrían en la duración de un proyecto cuando sus actividades tienen duraciones que se pueden expresar como distribuciones aleatorias con los siguientes casos:

- a) sustitución de las duraciones estocásticas de las actividades por sus valores medios (determinísticos)
- b) existencia de relaciones de dependencia en las duraciones de las actividades estocásticas.

Con el fin de determinar la validez de sustituir casos estocásticos dependientes por casos determinísticos independientes.

Las funciones de densidad probabilística a ser utilizados serán simétricas.

#### 5. El proyecto (caso de estudio)

El caso de estudio que se analizará es un proyecto con 8 actividades. Sus relaciones de precedencia se muestran en la figura 1.

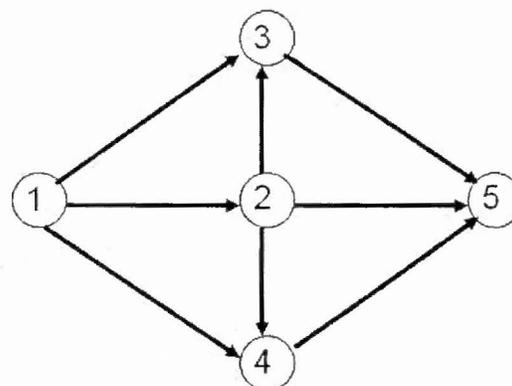


Figura 1: actividades del proyecto

#### 6. Construcción del modelo

El modelo se construyó con el paquete Arena, versión 7.0. Para representar las actividades se utilizó el módulo de proceso ("Process"). Para representar los eventos se utilizaron módulo de duplicación ("Duplicate") o módulos ("Batch") según se trate de eventos en los que comienzan o terminan varias actividades.

#### 7. Procedimiento

Se hicieron tres pruebas, o casos:

- a) duraciones determinísticas
- b) duraciones estocásticas independientes
- c) duraciones estocásticas dependientes

Casos a) y b)

Las duraciones de cada actividad para los casos a) y b) se muestran en la tabla 1. Para el caso a) se utilizó el promedio de la duración de cada actividad. En el caso b) se utilizó la distribución triangular indicada en la tabla 1.

Actividad	Duración (en días) - Distribución triangular				
	Media	Varianza	Optimista	Más probable	Pesimista
1-2	20	16,67	10	20	30
1-3	60	66,67	40	60	80
1-4	20	0,67	18	20	22
2-3	40	16,67	30	40	50
2-4	20	0,17	19	20	21
2-5	50	66,67	30	50	70
3-5	30	4,17	25	30	35
4-5	20	16,67	10	20	30

Tabla 1: duración de las actividades

## 8. Resultados

Caso c): Duraciones dependientes.

Las relaciones de dependencia están expresadas en la tabla 2. Las actividades 2-5, 3-5 y 4-5 tienen una duración que depende de la duración de las actividades 1-2, 1-3 y 1-4. Para ello se sigue las siguientes reglas:

Actividad 2-5:

Si la duración de la actividad 1-2 es mayor que 20 días, la distribución de frecuencias que representa la duración de la actividad 2-5 es una triangular (30, 60,90) si es inferior a veinte días la duración de la actividad 2-5 se toma de una distribución triangular (30,50,70), tal como en el caso b)

Actividad 3-5:

Si la duración de la actividad 1-3 es mayor que 60 días, la distribución de frecuencias que representa la duración de la actividad 3-5 es una triangular (20, 25, 30) si es inferior a sesenta días la duración de la actividad 3-5 se toma de una distribución triangular (25,30,35), tal como en el caso b)

Actividad 4-5:

Si la duración de la actividad 1-4 es mayor que 20 días, la distribución de frecuencias que representa la duración de la actividad 4-5 es una triangular (20, 30, 40) si es inferior a veinte días la duración de la actividad 4-5 se toma de una distribución triangular (10,20,30), tal como en el caso b)

Actividad	Duración (en días)				
	Promedio	Varianza	Optimista	Más probable	Pesimista
Actividades independientes					
1-2	20	16,67	10	20	30
1-3	60	66,67	40	60	80
1-4	20	0,67	18	20	22
2-3	40	16,67	30	40	50
2-4	20	0,17	19	20	21
Actividades dependientes					
	Tipo de dependencia	Optimista	Más probable	Pesimista	
2-5	Si la duración de 1-2 es menor que 20 días	30	50	70	
	Si la duración de 1-2 es mayor o igual a 20 días	30	60	90	
3-5	Si la duración de 1-3 es menor que 60 días	25	30	35	
	Si la duración de 1-3 es mayor o igual a 60 días	20	25	30	
4-5	Si la duración de 1-4 es menor que 20 días	10	20	30	
	Si la duración de 1-4 es mayor o igual a 20 días	20	30	40	

Tabla 2: Duración de las actividades

Caso a) Duraciones determinísticas

El tiempo de terminación del proyecto es de 90 días.

Caso b) Duraciones estocásticas, actividades independientes

Los resultados para mil replicaciones del proyecto son:

Variable de resultado: duración del proyecto (en días):

Promedio: 93,9 días  
Desviación estándar: 5,91 días  
Mínimo: 77 días  
Máximo: 112 días

La tabla 3 muestra la distribución de frecuencias de la duración del proyecto.

Intervalo de clase (días)	Número de observaciones	
	En el intervalo	Acumuladas
75,1 - 80,1	11	11
80,1 - 85,1	51	62
85,1 - 90,1	203	265
90,1 - 95,1	307	512
95,1 - 100,1	279	851
100,1 - 105,1	115	966
105,1 - 110,1	32	998
110,1 - 115,1	2	1000

Tabla 3: resultados caso b): duraciones independientes

Caso c) Duraciones dependientes

Los resultados para mil replicaciones del proyecto son:

Variable de resultado: duración del proyecto (en días):

Promedio: 78 días  
Desviación estándar: 9,58 días  
Mínimo: 54,1 días  
Máximo: 110 días

La tabla 4 muestra la distribución de frecuencias de la duración del proyecto.

Intervalo de clase (días)	Número de observaciones	
	En el intervalo	Acumuladas
49,9 – 59,9	3	3
59,9 – 69,9	198	201
69,9 – 79,9	442	643
79,9 – 89,9	229	872
89,9 – 99,9	97	969
99,9 – 109,9	30	999
109,9 – 119,9	1	1000

Tabla 4: resultados caso c): duraciones dependientes

## 9. Análisis de resultados:

Para el caso de estudio utilizado (mostrado en la red de la figura 1 y las duraciones indicadas en las tablas 2 y 3:

### Comparación del caso a) con el caso b)

Al representar las duraciones de cada actividad como una distribución aleatoria de datos se observa que el valor obtenido en la duración del proyecto en el caso determinístico (90 días) solamente se logra cumplir un 26,5 % de las veces (puesto que 265 veces de un total de 1000 replicaciones la duración del proyecto es 90 días o menos). El resto (735 veces) el proyecto dura más que lo que se hubiera estimado con duraciones determinísticas. (Mencionado en Blanco, 2007).

### Comparación del caso b) con el caso c)

Al representar dependencias en las duraciones de las actividades se observó una reducción en el valor promedio de la duración del proyecto (de 93,9 días a 78 días) y un aumento en la dispersión (la desviación estándar aumento de 5,91 a 9,58 días).

Se estima que estas diferencias se deben a los valores escogidos para las duraciones y las relaciones de dependencia indicadas.

## 10. Conclusiones

- i) La representación de las duraciones de las actividades como distribuciones de variables aleatorias es una ayuda para estimar con mayor precisión la duración de un proyecto.
- ii) La simulación de eventos discretos, y su aproximación a la simulación de Montecarlo permite representar con facilidad relaciones de dependencia de actividades, lo cual refina aun más la estimación de la duración de un proyecto.
- iii) Existen diferencias en la estimación de la duración de un proyecto según se consideren duraciones estocásticas (independientes o no) frente a duraciones determinísticas.
- iv) El caso de estudio se podría generalizar diciendo que los resultados obtenidos para un proyecto con relaciones de precedencia diferentes a las mostradas y duraciones diferentes a las indicadas, mostrarán diferencias en su tiempo de terminación según se consideren duraciones de las actividades:
  - i. Determinísticas
  - ii. Estocásticas independientes
  - iii. Estocásticas dependientes
- v) Solamente conociendo los resultados de la simulación se puede establecer la diferencia entre los tres enfoques para conocer la duración de un proyecto.

## 11. Áreas de interés para trabajos futuros

- Efecto de duraciones asimétricas de las actividades en la duración del proyecto.
- Efecto de diferentes tipos de funciones densidad en la duración del proyecto.

## Agradecimiento

Los autores desean agradecer las ideas y comentarios, siempre pertinentes y oportunos, de los Ingenieros Adelmo Fernández y Jorge Serebrisky de la Escuela de Ingeniería Industrial.

## 12. Referencias

---

- [1] Blanco Martínez, Ernesto *Planifico, pero... ¡nunca termino a tiempo!*, debates IESA, Volumen XII, Número 1, Enero-Marzo 2007
- [2] Chase, Richard; Aquilano, Nicholas; Jacobs, F. , 2000 *Administración de Producción y Operaciones*, 8ª. Edición, Mc Graw Hill.
- [3] Chuen-Tao, Luis Yu, 1974 *Aplicaciones Prácticas del PERT y CPM*, 5ª. Edición, Ediciones Deusto S.A.
- [4] Narasimhan, Sim, Mc Leavey, Dennis, Billington, Peter, 1996 *Planeación de la Producción y Control de Inventarios*, Segunda Edición, Ed. Prentice Hall.
- [5] Taha, Hamdy A. 1998 *Investigación de Operaciones Una Introducción*, 6ª. Edición, Ed. Prentice Hall.