



**PERFIL DE
CARGA
ARBITRARIA**

**1. Formulación del problema y
solución formal**

Utilizaremos la notación de [1],[2]. En esta trabajo consideramos el caso de una carga arbitraria $q(x)$, dada sobre el intervalo $0 < x < H$. Los resultados aquí obtenidos incluyen entonces los de [1], [2] como casos particulares (sin embargo no los de [3], [4], donde la carga es una distribución singular ([5])).

El cortante y el momento correspondiente están dados por ([1])

$$Q(x) = \int_x^H q(t)dt, \quad M(x) = -\int_x^H Q(s)ds ; \quad 0 \leq x \leq H$$

Respectivamente. En términos de la variable $\xi = \frac{x}{H}, \tilde{Q}(\xi) = \tilde{Q}(H\xi)$ y $\tilde{M}(\xi) = M(H\xi)$ están dadas por

$$\tilde{Q}(\xi) = H \int_{\xi}^1 \tilde{q}(\eta) d\eta; 0 \leq \xi \leq 1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\xi) &= -H^2 \int_{\xi}^1 \left(\int_v^1 \hat{q}(\eta) d\eta \right) dv; 0 \leq \xi \leq 1 \quad (2) \\ &= -H^2 \int_{\xi}^1 \left(\int_v^1 \tilde{q}(\eta) d\eta \right) dv; 0 \leq \xi \leq 1 \end{aligned}$$

La solución de la ecuación diferencial de Murashev-

$$\left. \begin{aligned} u^{(4)}(\xi) - \lambda^2 u''(\xi) &= g(\xi); 0 \leq \xi \leq 1 \\ g(\xi) &= H^4 \tilde{q}(\xi) + \frac{\lambda^2 H^2 \mu}{1 + \mu} \tilde{M}(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

■ P. Hummelgens
Universidad Simón Bolívar
■ M. Paparoni
UNIMET/Ingeniería Civil UCAB/CIDI/UCV

Sigalov-Baykov

con las condiciones de borde

$$u(0) = u'(0) = 0, u''(1) = 0, u'''(0) = -H^3 \tilde{Q}(0) \quad (4)$$

viene dada por ([1])

$$\left. \begin{aligned} \mu(\xi) &= \frac{1}{\lambda^3} \int_0^\xi \{ \sinh[\lambda(\xi-t)] - \lambda(\xi-t) \} g(t) dt \\ -\frac{H^3}{\lambda^3} \tilde{Q}(0) [\sinh(\lambda\xi) - \lambda\xi] + \frac{\cosh(\lambda\xi) - 1}{\lambda^3 \cosh \lambda} [H^3 \tilde{Q}(0) \sinh \lambda - I] \end{aligned} \right\} (5)$$

$$I = \int_0^1 \sinh[\lambda(1-t)] g(t) dt \quad (6)$$

2. Cómputo de las integrales

De 1.(1)-1.(3) vemos que en la solución formal 1.(5) aparecen integrales triples. En esta sección obtenemos una reducción a integrales simples.

Cambiando el orden de las integraciones en 1.(2)

$$\tilde{M}(t) = H^2 \int_t^1 (t-\eta) \tilde{q}(\eta) d\eta; 0 \leq t \leq 1 \quad (1)$$

De (1), 1.(3), 1.(5) vemos que tendremos que evaluar integrales de la forma

$$\int_0^\xi \Psi(\xi-t) \tilde{q}(t) dt \quad (2)$$

$$\phi(\xi) = \int_0^\xi \psi(\xi-t) \left(\int_t^1 (t-\eta) \tilde{q}(\eta) d\eta \right) dt \quad (3)$$

obtenemos

donde $\psi(\xi-t) = \sinh[\lambda(\xi-t)]$ o $\psi(\xi-t) = -t$, según el caso. Las integrales de la forma (2) no presentarán problemas. Cambiando el orden de las integrantes en (3). Obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \phi(\xi) &= \int_0^\xi \tilde{q}(\eta) \left(\int_0^\eta \psi(\xi-t)(t-\eta) dt \right) d\eta \\ &+ \int_\xi^1 \tilde{q}(\eta) \left(\int_0^\xi \psi(\xi-t)(t-\eta) dt \right) d\eta \end{aligned} \right\} (4)$$

En (4) podemos evaluar de manera exacta y en forma cerrada las integrales con respecto a t (como haremos a continuación) y luego el cómputo de $\Phi(\xi)$ se reduce a la evaluación de integrales simples.

Tenemos

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\eta (\xi-t)(t-\eta) dt &= \frac{1}{6} \eta^3 - \frac{1}{2} \xi \eta^2 \\ \int_0^\xi (\xi-t)(t-\eta) dt &= \frac{1}{6} \xi^3 - \frac{1}{2} \eta \xi^2 \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{aligned} &\int_0^\eta \sinh[\lambda(\xi-t)](t-\eta) dt = \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \{ \sinh[\lambda(\xi-\eta)] - \sinh(\lambda\xi) \} - \frac{\eta}{\lambda} \cosh(\lambda\xi) \\ &\int_0^\xi \sinh[\lambda(\xi-t)](t-\eta) dt = \frac{1}{\lambda^2} [\sinh(\lambda\xi) - \lambda\xi] - \frac{\eta}{\lambda} [\cosh(\lambda\xi) - 1] \end{aligned} \right\} (6)$$

De 1.(1), 1.(5), 1.(6) y (1)-(6) obtenemos finalmente

$$\left. \begin{aligned} u(\xi) &= \frac{H^4}{\lambda^3(1+\mu)} \int_0^\xi \{ \sinh[\lambda(\xi-t)] - \lambda(\xi-t) \} \tilde{q}(t) dt \\ &- \frac{H^3 \tilde{Q}(0)}{\lambda^3(1+\mu)} [\sinh(\lambda\xi) - \lambda\xi] + \frac{\cosh(\lambda\xi) - 1}{\lambda^3 \cosh \lambda} [H^3 \tilde{Q}(0) \sinh \lambda - J] \\ &+ \frac{H^4 \mu}{6(1+\mu)} \int_0^\xi (\xi-t)^3 \tilde{q}(t) dt - \frac{H^4 \mu}{6(1+\mu)} \xi^2 \int_0^1 (\xi-3t) \tilde{q}(t) dt \end{aligned} \right\} (7)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Q}(0) &= H \int_0^1 \tilde{q}(t) dt, \\ J &= \frac{H^4}{1+\mu} \int_0^1 \sinh[\lambda(1-t)] \tilde{q}(t) dt + \frac{H^3 \tilde{Q}(0) \mu}{1+\mu} \sinh \lambda \end{aligned} \right\} (8)$$

3. Fórmulas para pequeño

Para obtener una expresión de $u(\xi)$ numéricamente apta para su cómputo para valores pequeños de λ ($\lambda \rightarrow 0$) es necesario eliminar las potencias de A en los denominadores en 2.(8). Como en [1] definimos las funciones

$$L_m(\xi) = -\frac{\xi^{m+2}}{(m+1)(m+2)}; m = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$S_m(\xi) = m! \xi^{m+2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda\xi)^{2k}}{(m+2k+2)!}; m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

tenemos entonces

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sinh(\lambda\xi) - \lambda\xi}{\lambda^3} &= -L_1(\xi) + S_1(\xi) \\ \frac{\sinh(\lambda\xi)}{\lambda} &= \xi + \lambda^2 [-L_1(\xi) + S_1(\xi)] \\ \frac{\cosh(\lambda\xi) - 1}{\lambda^2} &= -L_0(\xi) + S_0(\xi) \end{aligned} \right\} (3)$$

Además

$$L'_m(\xi) = mL_{m-1}(\xi), S'_m(\xi) = mS_{m-1}(\xi); m \geq 1 \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} S'_0(\xi) &= \lambda^2[-L_1(\xi) + S_1(\xi)], S''_0(\xi) = \lambda^2[-L_0(\xi) + S_0(\xi)], \\ S'''_0(\xi) &= \lambda^2\xi + \lambda^4[-L_1(\xi) + S_1(\xi)] \end{aligned} \right\} (5)$$

La función $S_m(\xi)$ es implementada en MATHEMATICA en términos de la función gamma y la función hipergeométrica generalizada.

Sea

$$A = \int_0^1 [-t + \lambda^2[-L_1(1-t) + S_1(1-t)]] \tilde{q}(t) dt \quad (6)$$

entonces tenemos de 2.(7), 2.(8), (1)-(5),

$$\left. \begin{aligned} u(\xi) &= -H^4 \int_0^\xi L_1(\xi-t) \tilde{q}(t) dt + \frac{H^4}{1+\mu} \int_0^\xi S_1(\xi-t) \tilde{q}(t) dt \\ &+ H^3 \tilde{Q}(0) L_1(\xi) - \frac{H^3 \tilde{Q}(0)}{1+\mu} S_1(\xi) + \frac{H^3 \tilde{Q}(0) \lambda^2}{(1+\mu) \cosh \lambda} [-L_1(1) + S_1(1)] [-L_0(\xi) + S_0(\xi)] \\ &- \frac{H^4 \lambda}{(1+\mu) \cosh \lambda} [-L_0(\xi) + S_0(\xi)] - \frac{H^4 \mu}{1+\mu} \left(\int_0^1 \tilde{q}(t) dt \right) L_0(\xi) \end{aligned} \right\} (7)$$

Usando (4),(5) es fácil escribir a partir de (7) las expresiones para las tres primeras derivadas de $u(\xi)$ (las cuales no reproducimos aquí por razones de espacio).

4. Fórmulas para λ , grande

Para obtener una expresión de $u(\xi)$ numéricamente apta para su cómputo para valores grandes de $\lambda (\lambda \rightarrow \infty)$ es necesario prescribir 2.(7) en una forma distinta de 3.(7). Tenemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sinh[\lambda(1-t)]}{\cosh \lambda} = \begin{cases} 0; 0 < t \leq 1 \\ 1; t = 0 \end{cases} \quad (1),$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sinh[\lambda(1-\xi)]}{\sinh \lambda} = \begin{cases} 0; 0 < \xi \leq 1 \\ 1; \xi = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Combinando en 2(7) el segundo término y el tercer término (utilizando 2.(8)) resulta la expresión

$$\left. \begin{aligned} & - \frac{H^3 \tilde{Q}(0)}{\lambda^3(1+\mu)} \tanh \lambda \left(1 - \frac{\sinh[\lambda(1-\xi)]}{\sinh \lambda} \right) \\ & + \frac{H^4}{\lambda^3(1+\mu)} \int_0^1 \frac{\sinh[\lambda(1-t)]}{\cosh \lambda} \tilde{q}(t) dt - \frac{H^4}{\lambda^3(1+\mu)} \frac{\cosh(\lambda \xi)}{\cosh \lambda} \int_0^1 \sinh[\lambda(1-t)] \tilde{q}(t) dt \end{aligned} \right\} (3)$$

Por (1),(2), los primeros dos términos en (3) tienden a cero si $\lambda \rightarrow \infty$. Para tratar con el tercer término en (3) utilizaremos el hecho que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \cosh(\lambda \eta) \frac{\sinh[\lambda(1-t)]}{\cosh \lambda} = 0; 0 \leq \eta < t \leq 1 \quad (4)$$

La segunda integral en (3) dividimos en dos partes según $\int_0^1 = \int_0^\xi + \int_\xi^1$. Por (4) tenemos

$$\frac{\cosh(\lambda \xi)}{\cosh \lambda} \int_\xi^1 \sinh[\lambda(1-t)] \tilde{q}(t) dt \rightarrow 0 \text{ si } \lambda \rightarrow \infty \quad (5)$$

A la integral \int_0^ξ sumamos la integral

$\int_0^\xi \sinh[\lambda(\xi-t)] \tilde{q}(t) dt$ que aparece en 2.(7). Ahora observamos que

$$-\cosh(\lambda \xi) \frac{\sinh[\lambda(1-t)]}{\cosh \lambda} + \sinh[\lambda(\xi-t)] = -\cosh(\lambda t) \frac{\sinh[\lambda(1-\xi)]}{\cosh \lambda} \quad (6)$$

y con (4) obtenemos

$$\int_0^\xi \sinh[\lambda(\xi-t)] \tilde{q}(t) dt - \frac{\cosh(\lambda \xi)}{\cosh \lambda} \int_0^\xi \sinh[\lambda(1-t)] \tilde{q}(t) dt \rightarrow 0 \quad (7)$$

si $\lambda \rightarrow 0$

Finalmente escribimos $u(\xi)$ en la forma (utilizamos 3.(7), (1)-(7))

$$\left. \begin{aligned} u(\xi) &= - \frac{H^4}{\lambda^3(1+\mu)} \int_0^\xi \frac{\cosh(\lambda t)}{\cosh \lambda} \sinh[\lambda(1-\xi)] \tilde{q}(t) dt + \frac{H^3 \tilde{Q}(0)}{\lambda^2(1+\mu)} \xi \\ & - \frac{H^4}{\lambda^3(1+\mu)} \int_0^\xi (\xi-t) \tilde{q}(t) dt - \frac{H^3 \tilde{Q}(0)}{\lambda^3(1+\mu)} \tanh \lambda \left(1 - \frac{\sinh[\lambda(1-\xi)]}{\sinh \lambda} \right) \\ & + \frac{H^4}{\lambda^3(1+\mu)} \int_0^1 \frac{\sinh[\lambda(1-t)]}{\cosh \lambda} \tilde{q}(t) dt - \frac{H^4}{\lambda^3(1+\mu)} \int_\xi^1 \frac{\cosh(\lambda \xi)}{\cosh \lambda} \sinh[\lambda(1-t)] \tilde{q}(t) dt \\ & + \frac{H^4 \mu}{6(1+\mu)} \int_0^\xi (\xi-t)^3 \tilde{q}(t) dt - \frac{H^4 \mu}{6(1+\mu)} \xi^2 \int_0^1 (\xi-3t) \tilde{q}(t) dt \end{aligned} \right\} (8)$$

apta para valores grandes λ Es ahora fácil escribir expresiones para las primeras tres derivadas de $u(\xi)$ (las cuales no reproducimos por razones de espacio).

Podemos ahora comparar el comportamiento de $u(\xi)$ y sus derivadas para $\lambda \rightarrow 0$ y $\lambda \rightarrow \infty$ Resulta de 3.(6), 3.(7) $u_0(\xi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} u(\xi)$ que para tenemos

$$u_0(\xi) = \left. \begin{aligned} & -H^4 \int_0^\xi L_1(\xi-t) \tilde{q}(t) dt + H^3 \tilde{Q}(0) L_1(\xi) \\ & -H^4 \left(\int_0^1 t \tilde{q}(t) dt \right) L_0(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

de (1),(2),(4)-(8) obtenemos para que $u_0(\xi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mu(\xi)$ que

$$u_\infty(\xi) = \frac{\mu}{1+\mu} u_0(\xi) \quad (10)$$

es fácil ver que (10) es válida también si reemplazamos $u_\infty(\xi)$ y $u_0(\xi)$ por $(u^{(k)})_\infty, (U^{(k)}(\xi))$ o $(\kappa=1,2,3)$ respectivamente ξ (tenemos $(u^{(k)})_0(\xi) = u_0^{(k)}(\xi), (U^{(k)})_\infty(\xi) = u^{(k)}(\xi)$).

5. Observaciones finales

Experimentos numéricos indican que para $\sim q(t) = t^n (n \geq 0 \text{ entero})$ y λ grande, MATHEMATICA no lograr producir la gráfica de

$$\phi(\xi) = \int_\xi^1 \frac{\cosh(\lambda \xi)}{\cosh \lambda} \sinh[\lambda(1-t)] \tilde{q}(t) dt \quad (1)$$

(que aparece en 4.(8)) en una parte derecha del intervalo [0;1]. Usando la identidad de $\sinh r = \cosh r - e^{-r}$ podemos escribir $\Phi(\xi)$ en la forma

$$\phi(\xi) = \int_\xi^1 \frac{\cosh(\lambda \xi)}{\cosh \lambda} \{ \cosh[\lambda(1-t)] - e^{-\lambda(1-t)} \} \tilde{q}(t) dt \quad (2)$$

y con $\Phi(\xi)$ programada en la forma (2), el problema señalado desaparece.

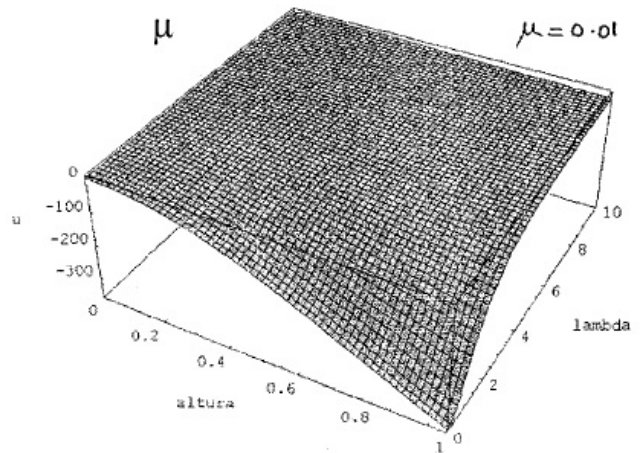
A base de los resultados de las secciones 3,4 (y las correspondientes expresiones para las primeras tres derivadas de $\mu(\xi)$) es fácil escribir un programa en MATHEMATICA que acepta a funciones arbitrarias $\sim q(t)$ como datos de entrada. El funcionamiento del programa dependerá de los procedimientos gráficos y de integración de MATHEMATICA. En las gráficas de salida están involucradas funciones definidas como integrales límites de integración variables y es imposible predecir en términos generales cuando aparecerán problemas similares al problema señalado arriba para $\Phi(\xi)$. En determinados casos entonces puede ser que el programa necesitará de modificaciones puntuales.

En [2] la generalización de una carga

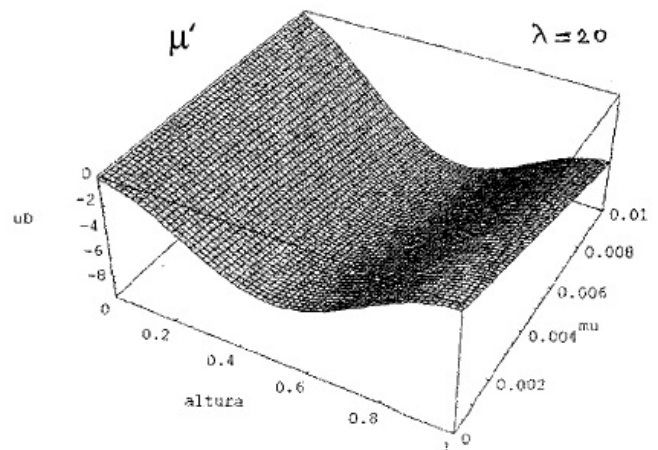
$$q(x) = \hat{q} \left(\frac{x}{H} \right)^\eta \text{ con } \mu \geq 0 \text{ entero al caso } \eta \geq 0$$

arbitrario se logró mediante consideraciones adicionales complicadas, sobre todo para cubrir el caso de grandes valores de λ . En el presente trabajo ambos casos (n entero o no) están incluidas en el mismo formalismo. Aplicable a cargas $q(x)$ completamente arbitrarias, además hemos logrado un tratamiento de los casos límite $\lambda \rightarrow 0$ y $\lambda \rightarrow \infty$ que no depende (como en [1]-[4]) de la forma particular de $q(x)$

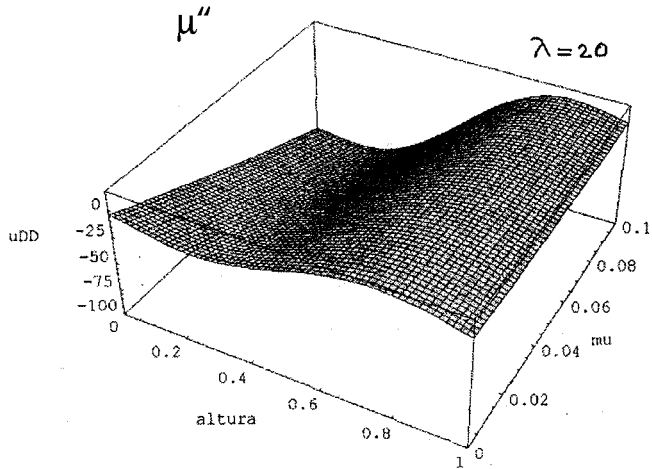
En [1]-[4] nuestros programas no requieren de la evaluación de integrales por parte de MATHEMATICA y las gráficas se producen con rapidez. El programa basado en las fórmulas obtenidas en el presente trabajo lógicamente mucho mas lento.



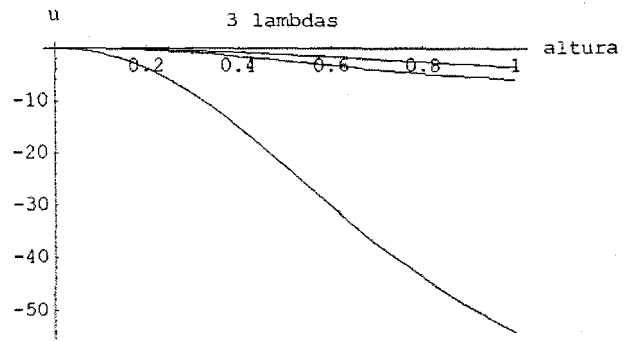
In [1466]:= fID3DMu [20, 0, 1, 0, 0.01]



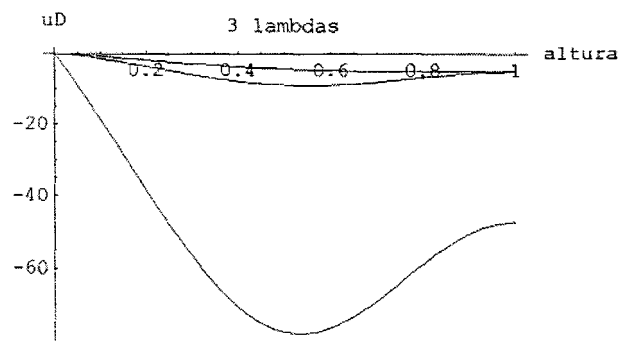
In [1467]:= fLDseg3DMu [20, 0, 1, 0, 0.01]



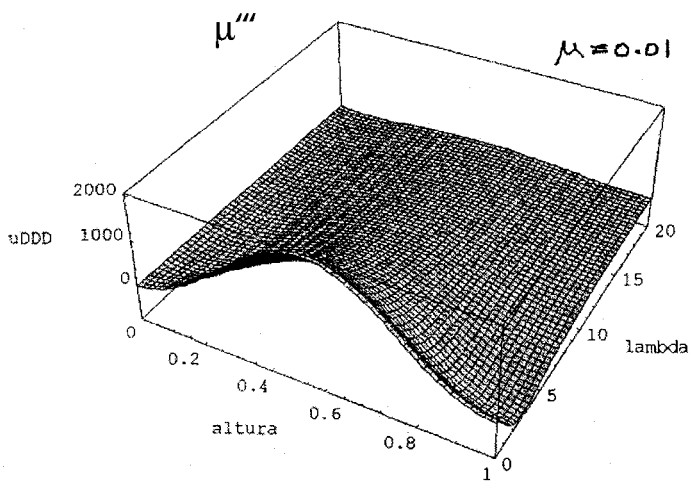
In [1475]:= fLamList [20, 0.01, 0, 1]



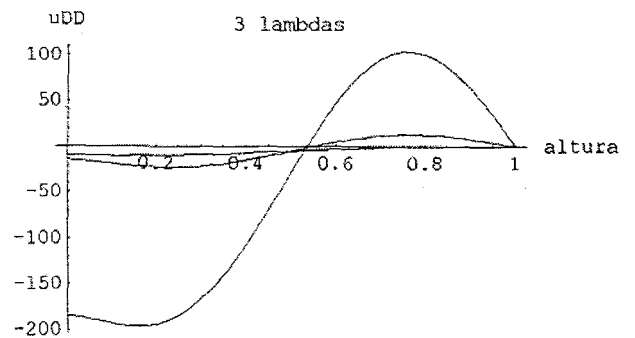
In [1476]:= fDLamList [20, 0.01, 0, 1]



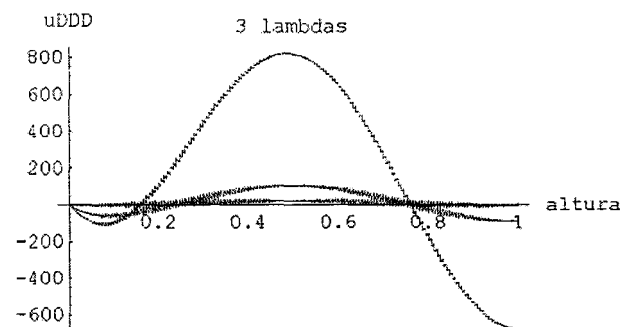
In [1466]:= fLDter3DLam [0.01, 0, 1, 0, 20]



In [1477]:= fLDsegLamList [20, 0.01, 0, 1]



In [1478]:= fLDterLamList [20, 0.01, 0, 1]



Referencias

1. P.F. Hummelgen, M Paparoni. "soluciones del medio continuo aplicables a perfiles de carga generalizadas, a partir de la ecuación diferencial de Murashev, Sigalov, Baykov, Parte 1", Tekhne N°5-2001.
2. V.I. Murashev, E.V. Sigalov, J. Baykov: "Design and Reinforced Concrete Structures", Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1971.
3. N.N. Lebedev, "Special Functions and their Applications", Dover Publications Inc., New York, 1971.
4. J.P. Schoutren "Operatorenrechnung mit Anwendungen auf Technische Probleme", Springer Verlag, 1961.
5. H.S. Carslaw , J. C Jaeger. "Operational Methods in Applied Mathematics", Dover Publications Inc., New York, 1963.