SOLUCIÓN CON MÚLTIPLES CARGAS PUNTUALES

1. Introducción

En una serie de publicaciones ([1]-[5]) hemos estudiado soluciones del medio continuo a partir de la ecuación diferencial de Murashev, Sigalov y Baykov para diferentes perfiles de carga sobre el pórtico. La publicación [5] contiene los resultados de [1],[2] como casos particulares ya que proporciona soluciones para cargas de perfil q(x) arbitraria con la única restricción que q(x) sea integrable (incluye entonces también q(x) continuos a trozos y con saltos y hasta q(x) más "malcriadas" todavía). De otra parte resolvimos en [4] el problema de un número arbitrario de cargas puntuales (incluyendo el caso de una fuerza puntual en el tope tratado en [3]).

En el presente trabajo queremos relacionar los resultados obtenidos en [4],[5]. De una parte los resultados de [4] pueden obtenerse de los de [5]. De otra parte podemos aproximar una carga de perfil q(x) mediante una distribución de cargas puntuales y así por discretización obtener una solución aproximada para el problema con perfil q(x), satisfactorio de punto de vista de la ingeniería y con la ventaja de un programa más rápido, evitando la evaluación de integrales por MATHEMATICA.

2. De perfíl general a cargas puntuales

En [5] obtuvimos para una carga con perfil general q(x) la solución

■ P. Hummelgens
Universidad Simón Bolívar
■ M. Paparoni
UNIMET/Ingeniería Civil UCAB/CIDI/UCV

$$\left.\begin{aligned}\mu(\xi)=&\frac{H^4}{\lambda^3(1+\mu)}\int_0^\xi\{senh[\lambda(\xi-t)]-\lambda(\xi-t)\}\tilde{q}(t)dt\\&-\frac{H^3\tilde{Q}(0)}{\lambda^3(1+\mu)}[senh(\lambda\xi)-\lambda\xi]+\frac{\cosh(\lambda\xi)-1}{\lambda^3\cosh\lambda}\left[H^3\hat{Q}(0)senh\lambda-J\right]\\&+\frac{H^4\mu}{6(1+\mu)}\int_0^\xi(\xi-t)^3\tilde{q}(t)dt-\frac{H^4\mu}{6(1+\mu)}\xi^2\int_0^1(\xi-3t)\tilde{q}(t)dt;0\le\xi\le1\end{aligned}\right\}(1)$$

Donde

$$J=\frac{H^4}{1+\mu}\int_0^1 senh[\lambda(1-t)]\tilde{q}(t)dt+\frac{H^3\tilde{Q}(0)\mu}{1+\mu}senh\lambda \quad (2)$$

$$\tilde{Q}(0)=H\int_0^1\tilde{q}(t)dt \qquad (3)$$

Una fuerza puntual de magnitud F a la altura $x_0(0<x_0\le H)$ es representado matemáticamente por $q(x)=F\delta(x-x_0)$, donde δ es la distribución de Dirac. Bajo el cambio a la variable $\xi=\frac{x}{H}$ la expresión para la fuerza puntual se transforma a

([6]). La propiedad fundamental de la δ de Dirac que

$$\int_a^b f(t)\ \delta\ (t-\xi_0)dt=f(\xi_0) \quad si \quad a<\xi_0<b \qquad (5),$$

$$\tilde{q}(\xi)=\frac{F}{H}\delta(\xi-\xi_0) \qquad (4. \ \xi_0\notin[a;b].$$

necesitamos aquí se expresa formalmente (en la notación simbólica de los físicos) por

mientras que la integral es cero cuando

De esta manera entonces tenemos por ejemplo

$$\tilde{Q}(0)\underset{(4)}{=}H\int_0^1\frac{F}{H}\delta(t-\xi_0)dt\underset{(5)}{=}F,$$

$$\int_0^\xi\{senh[\lambda(\xi-t)]-\lambda(\xi-t)\}\tilde{q}(t)dt=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{si}\quad 0\le\xi<\xi_0\\ \frac{F}{H}\{senh[\lambda(\xi-\xi_0)]-\lambda(\xi-\xi_0)\} & \text{si}\ \xi_0<\xi\le1\end{cases}$$

...............etc. De esta manera obtenemos de (1),(2) que

$$\left.\begin{aligned}\mu(\xi)=&-\frac{H^3F}{\lambda^3(1+\mu)}[senh(\lambda\xi)-\lambda\xi]-\frac{H^3F\mu}{1+\mu}\left(\frac{1}{6}\xi^3-\frac{1}{2}\xi_0\xi^2\right)\\&+\frac{H^3F}{\lambda^3(1+\mu)}[\cosh(\lambda\xi)-1]\left\{\tanh\lambda-\frac{senh[\lambda(1-\xi_0)]}{\cosh\lambda}\right\};\quad 0\le\xi<\xi_0\end{aligned}\right\}(6)$$

$$\left.\begin{aligned}\mu(\xi)=&-\frac{H^3F}{\lambda^3(1+\mu)}\{senh[\lambda(\xi-\xi_0)]-senh(\lambda\xi)+\lambda\xi_0\}\\&+\frac{H^3F}{\lambda^3(1+\mu)}[\cosh(\lambda\xi)-1]\left\{\tanh\lambda-\frac{senh[\lambda(1-\xi_0)]}{\cosh\lambda}\right\}-\frac{H^3F\mu}{1+\mu}\left(\frac{1}{6}\xi_0^3-\frac{1}{2}\xi_0^2\xi\right)\\&;\xi_0<\xi\le1\end{aligned}\right\}(7)$$

los mismos resultados (6),(7) encontramos en [4].

3. Discretización de un perfil general

Sea

$$\phi_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n}\tilde{q}\left(\frac{K}{n}\right)\ \delta\ \left(t-\frac{K}{n}\right);n1,2................ \qquad (3)$$

Entonces ([6]) $\phi_n(t)\to\tilde{q}(t)$ si $n\to\infty$, en este sentido

aproximar un perfil genera $\tilde{q}(t)$ por una distribución de cargas puntuales de magnitudes $\frac{H}{n}\tilde{q}\left(\frac{K}{n}\right)$ en los puntos $\xi_K=\frac{K}{n}K=1,........n$ obteniendose una mejor distribucional. En este sentido podemos

$\mu_K(\xi)$dada por 2.(6), 2.(7). Con ξ_0 reemplazado por ξ_K y F reemplazada por $\frac{H}{n}\tilde{q}\left(\frac{K}{n}\right)$. Como indicamos en aproximacion mientras mas grande n. Cada una de estas fuerzas puntuales lleva a una respuesta

[4], la respuesta a todo el conjunto de fuerzas puntuales viene dada por

$$\mu_n(\xi)=\sum_{K=1}^{n}\mu_K(\xi)\ ;0\le\xi\le1 \qquad (2)$$

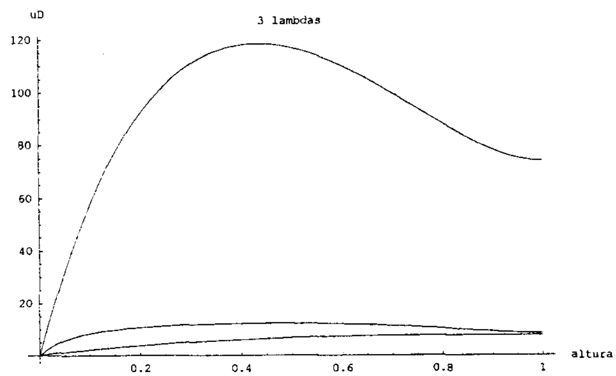
y es una aproximación de la respuesta $\mu(\xi)$ dada por 2.(1).

Hemos realizado algunos experimentos numéricos con MATHEMATICA, comparando las gráficas de $\mu(\xi)$ y sus primeras tres derivadas obtenidas según [5] con las gráficas de $\mu_n(\xi$ y sus primeras tres derivadas

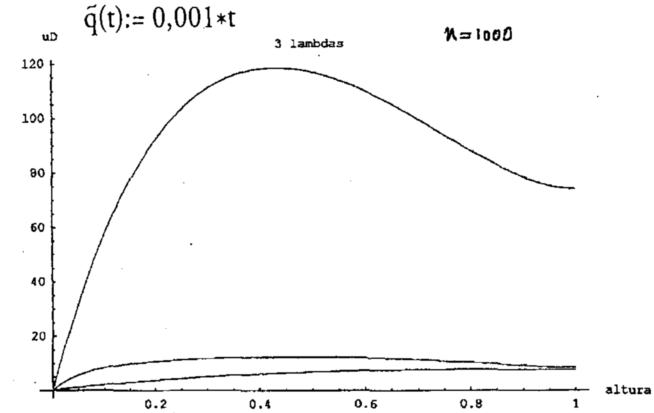
obtenidas según [4], para varios perfiles de carga $q(\xi)$

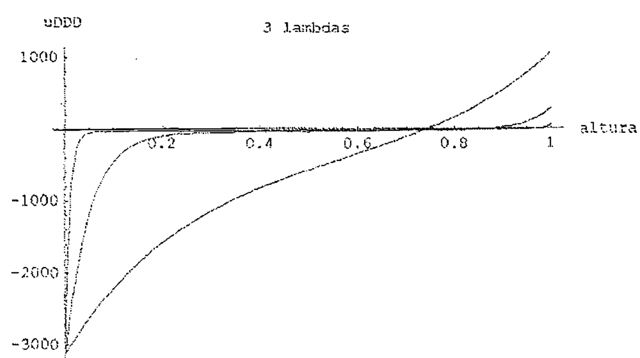
y sus varios valores de n. Una muestra de estas comparaciones se presenta al final de este trabajo.

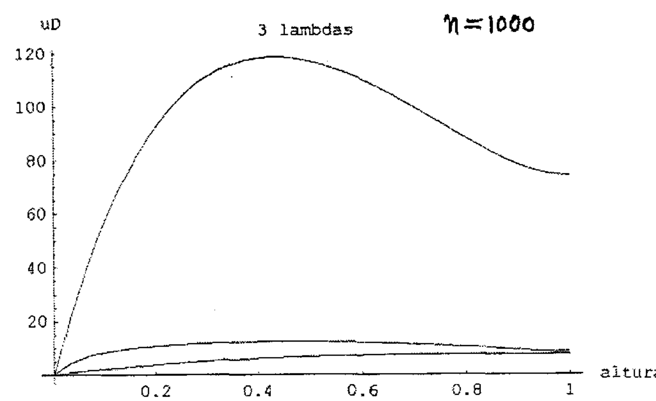
$\tilde{q}(t) := 0{,}001*t$

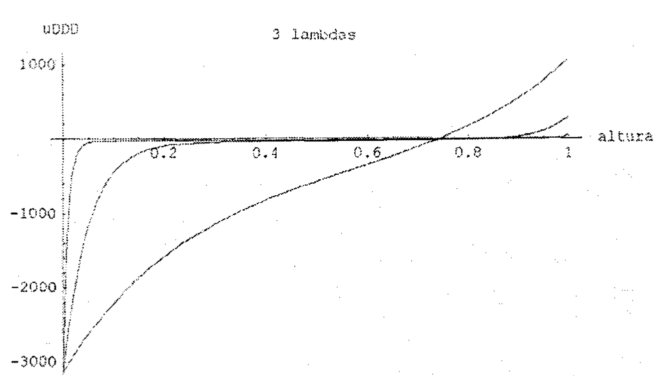


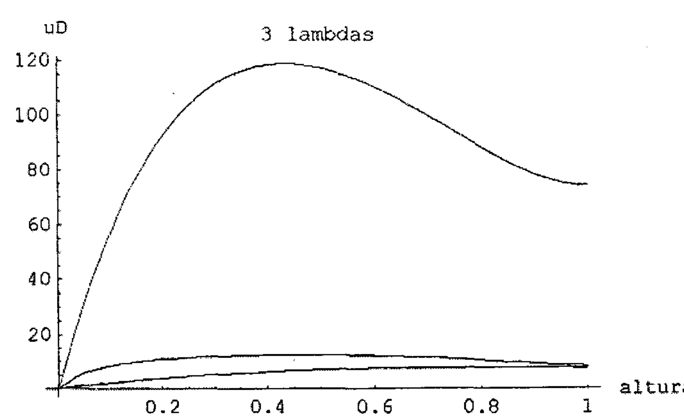
$\tilde{q}(t) := 0{,}001*t$

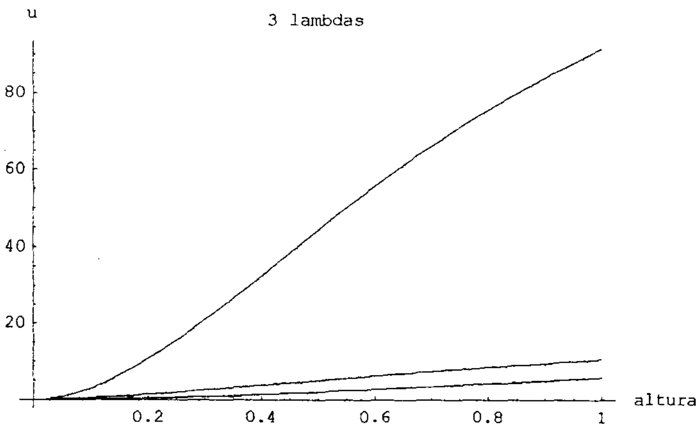


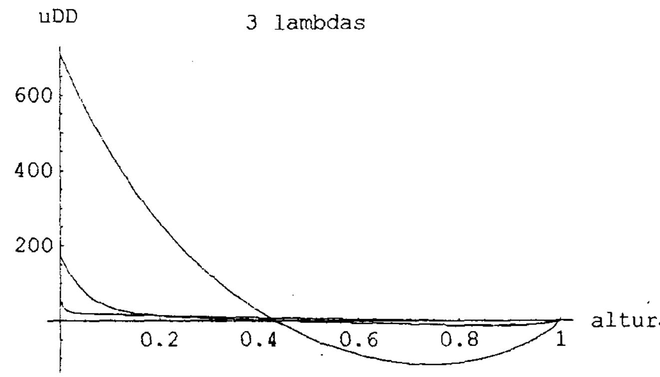


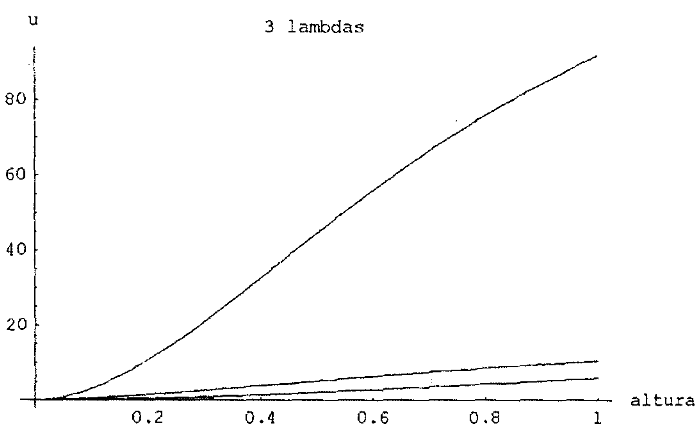


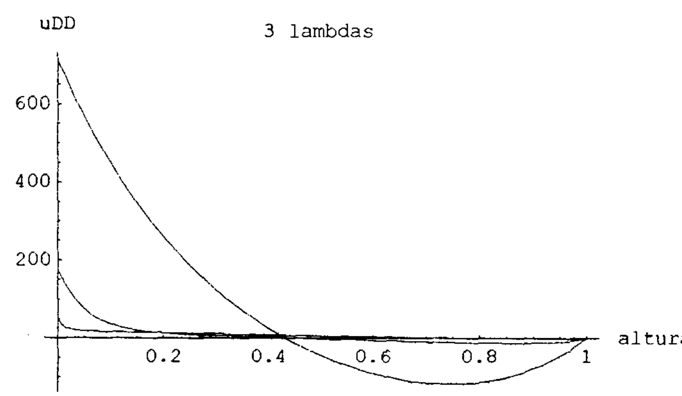


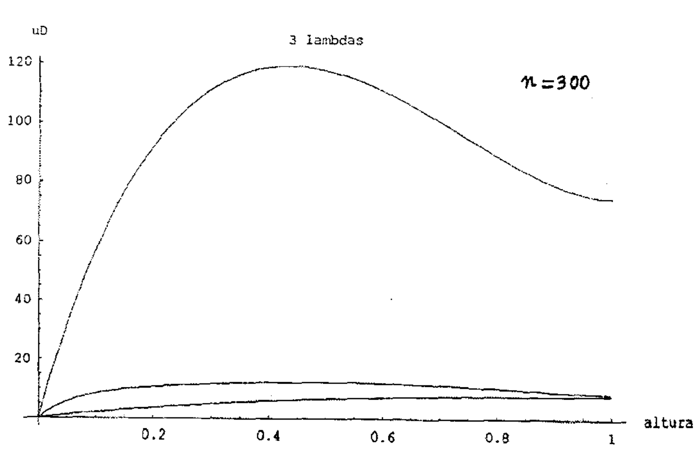



u
3 lambdas
80
60
40
20
0.2
0.4
0.6
0.8
1
altura


uDD
3 lambdas
600
400
200
0.2
0.4
0.6
0.8
1
altura


u
3 lambdas
80
60
40
20
0.2
0.4
0.6
0.8
1
altura


uDD
3 lambdas
600
400
200
0.2
0.4
0.6
0.8
1
altura


uD
3 lambdas
n=300
120
100
80
60
40
20
0.2
0.4
0.6
0.8
1
altura