FUERZA PUNTUAL EN EL TOPE

■ P. Hummelgens
Universidad Simón Bolívar
■ M. Paparoni
UNIMET/Ingeniería Civil UCAB/CIDI/UCV

1. Formulación del problema y solución formal

Utilizaremos la notación [1]. [2]. En este trabajo nos ocupa el caso de una carga puntual horizontal de magnitud F en el tope x=H. Para el cortante y el momento correspondiente en términos de la variable $\xi = \dfrac{x}{H}$ tenemos

$$\tilde{Q}(\xi) = F; o \le \xi \le 1 \qquad (1),$$

$$\tilde{M}(\xi) = HF(\xi - 1); o \le \xi \le 1 \qquad (2).$$

Según las consideraciones en [1], nuestro problema es la resolución de la ecuación diferencial de Murashev, Sigalov y Baykov

$$\left.\begin{aligned} &u^{(4)}\left(\xi - \lambda^2 u''(\xi) = g(\xi); 0 \le \xi \le 1 \right) \\ &g(\xi) = \frac{H^2\lambda^2\mu}{1+\mu}\tilde{M}(\xi) \overset{(2)}{=} \frac{H^3F\lambda^2\mu}{1+\mu}(\xi - 1) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Con las condiciones de borde

$$u(0) = u'(0) = 0, u''(1) = 0, u'''(0) = -H^3\hat{Q}(0) \overset{(1)}{=} -H^3F (4)$$

La solución general de la ecuación homogénea $\mu^{(4)}(\xi) - \lambda^2\mu''(\xi) = 0$ está dada por

$$u_h(\xi) = \alpha e^{\lambda\xi} + \beta e^{-\lambda\xi} + \gamma\xi + \delta \qquad (5)$$

Donde *α,β,γ,δ* son constantes arbitrarias. Una solución particular de la ecuación diferencial en (3) está dada por el producto de consolación ([1])

$$u_p(\xi) = \frac{1}{\lambda^3} h(\xi)\left[senh(\lambda\xi) - \lambda\xi\right] * g(\xi),$$

Donde $_{h()}$ es la función de Heaviside. Evaluando el producto de consolación, usando (3), obtenemos

$$\left.\begin{aligned} u_p(\xi) &= \frac{H^3F\mu}{\lambda^3(1+\mu)}\left[senh(\lambda\xi) - \lambda\xi\right] \\ &-\frac{H^3F\mu}{\lambda^2(1+\mu)}\left[\cosh(\lambda\xi)-1\right] - \frac{M^3F\mu}{1+\mu}\left(\frac{1}{6}\xi^3 - \frac{1}{2}\xi^2\right)\end{aligned}\right\}(6)$$

Con (5), (6) tenemos la solución general $\mu(\xi) = u_p(\xi) + u_h(\xi)$ de la ecuación diferencial (3) Aplicando (4) obtenemos

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = -\frac{1}{2}\left(\delta + \frac{H^3F}{\lambda^3}\right), \beta = \frac{1}{2}\left(-\delta + \frac{H^3F}{\lambda^3}\right), \\ &\gamma = \frac{H^3F}{\lambda^2}, \delta = \frac{H^3F}{\lambda^2(1+\mu)}\left[-\mu - \frac{\tanh\lambda}{\lambda}\right]\end{aligned}\right\}(7)$$

De (5), (6), (7) obtenemos la solución de nuestro problema en la forma

$$\left.\begin{aligned} \mu(\xi) &= -\frac{H^3F}{\lambda^3(1+\mu)}\left[senh(\lambda\xi) - \lambda\xi\right] \\ &+\frac{H^3F}{\lambda^3(1+\mu)}\tanh\lambda\left[\cosh(\lambda\xi)-1\right] - \frac{H^3F\mu}{1+\mu}\left(\frac{1}{6}\xi^3 - \frac{1}{2}\xi^2\right)\end{aligned}\right\}(8)$$

2. Fórmula para λ pequeño

Para obtener una expresión de *u()* numéricamente apta para su cómputo para valores pequeño

de *AA*, *0*), es necesario eliminar las potencias de

λ en los denominadores en 1.(8). Como en [1] definimos las funciones

$$L_m(\xi) = -\frac{\xi^{m+2}}{(m+1)(m+2)}; m = 0,1,2,.............. \quad (1)$$

$$S_m(\xi) = m!\xi^{m+2}.\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda\xi)^{2k}}{(m+2k+2)!}; m = 0,1,2,........(2)$$

Tenemos entonces

$$\left.\begin{aligned} \frac{senh(\lambda\xi) - \lambda\xi}{\lambda^3} &= -L_1(\xi) + S_1(\xi) \\ \frac{senh(\lambda\xi)}{\lambda} &= \xi + \lambda^2\left[-L_1(\xi) + S_1(\xi)\right] \\ \frac{\cosh(\lambda\xi)-1}{\lambda^2} &= -L_0(\xi) + S_0(\xi)\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Además

$$L'_m(\xi) = mL_{m-1}(\xi), S'_m(\xi) = mS_{m-1}(\xi); m \geq 1 \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} &S'_0(\xi) = \lambda^2\left[-L_1(\xi) + S_1(\xi)\right] \quad , S_0''(\xi) = \lambda^2\left[-L_0(\xi) + S_0(\xi)\right], \\ &S_0'''(\xi) = \lambda^2\xi + \lambda^4\left[-L_1(\xi) + S_1(\xi)\right]\end{aligned}\right\}(5)$$

La función $S_m(\xi)$, es implementada en MATHEMATICA en términos de la función gamma y la función hipergeométrica generalizada.

De 1.(8),(1)-(5) obtenemos

$$\left.\begin{aligned} u(\xi) &= -\frac{H^3F}{1+\mu}\left[-L_1(\xi) + S_1(\xi)\right] - \frac{H^3F\mu}{1+\mu}\left(\frac{1}{6}\xi^3 - \frac{1}{2}\xi^2\right) \\ &+\frac{H^3F}{(1+\mu)\cosh\lambda}\left(1 + \lambda^2\left[-L_1(1) + S_1(1)\right]\right)\cdot\left[-L_0(\xi) + S_0(\xi)\right]\end{aligned}\right\}(6)$$

Usando (4), (5) se obtiene inmediatamente las expresiones para las primera tres derivadas de μ(ξ) , (las cuales no reproducimos aquí por razones de espacio).

3. Fórmulas para Λ grande

Podemos escribir 1.(8) en la forma

$$\left.\begin{aligned} u(\xi) &= -\frac{H^3F\mu}{1+\mu}\left(\frac{1}{6}\xi^3 - \frac{1}{2}\xi^2\right) + \frac{H^3F}{\lambda^2(1+\mu)}\xi \\ &-\frac{H^3F}{\lambda^3(1+\mu)}\left(\tanh\quad\lambda - \frac{senh\left[\lambda(1-\xi)\right]}{\cosh\lambda}\right)\end{aligned}\right\} \quad (1),$$

apta para evaluar $u(\xi)$ para valores grandes de $\lambda(\lambda \to \infty)$ ya que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\tanh\lambda = 1, \lim_{\lambda\to\infty}\frac{senh\left[\lambda(1-\xi)\right]}{\cosh\lambda} = \begin{cases} 0; 0 \leq \xi \leq 1 \\ 1; \xi = 0\end{cases} (2)$$

De (1) se obtiene inmediaticamente las expresiones para las primera tres derivadas de *u()* (las cuales no reproducimos aquí por razones de espacio) para $u_0(\xi)=\lim_{\lambda\to 0}u(\xi)$ y $u_\infty(\xi)=Lim_{\lambda\to\infty}u(\xi)$ obtenemos de 2.(6) y (1) (usando (2)) que

$$u_0(\xi)=H^3F\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{6}\xi^3\right) \qquad (3)$$

$$u_\infty(\xi)=\frac{\mu}{1+\mu}\mu_0(\xi) \qquad (4)$$

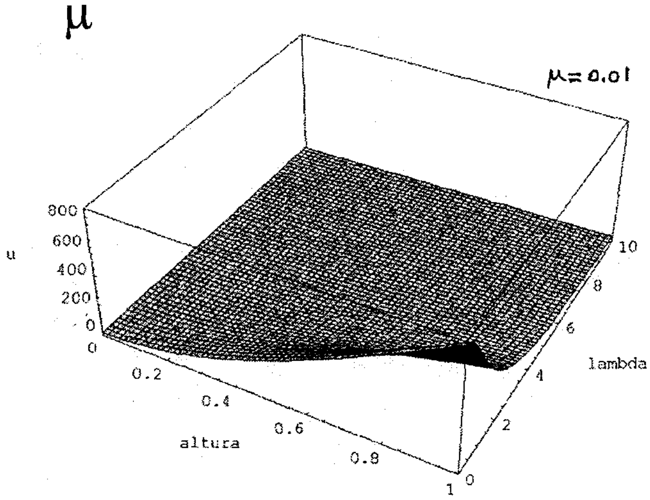
Los casos límites

$$\lim_{\lambda\to\infty}u^k(\xi)\ \ y\ \ \lim_{\lambda\to 0}u^{(k)}(\xi)(k=1,2,3.....)$$

se obtiene como las derivadas correspondientes de $\mu\infty(\xi)$ y $\mu_0(\xi)$ respectivamente y (4) resulta válida para as derivadas también.

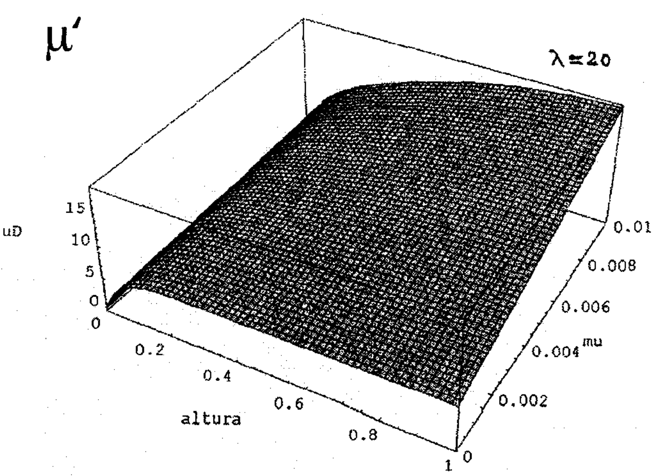
Nuestro programa en MATHEMATICA contiene funciones gráficas similares a las de [1],[2]. Algunas de las gráficas obtenidas se presentan a continuación.

μ

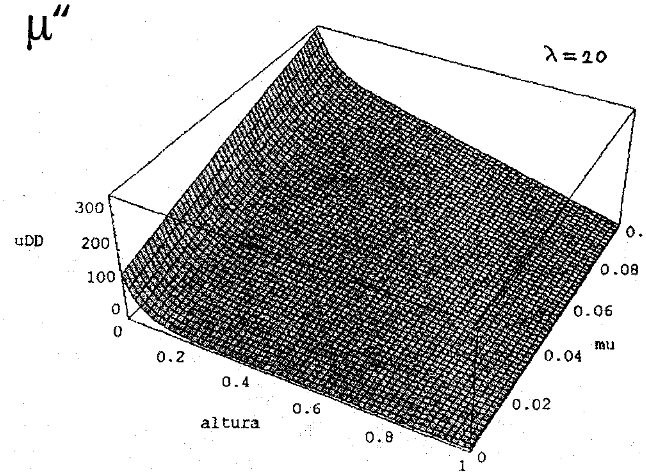


In [1309]:= flD3DMu [20, 0, 1, 0, 0.01]

μ'

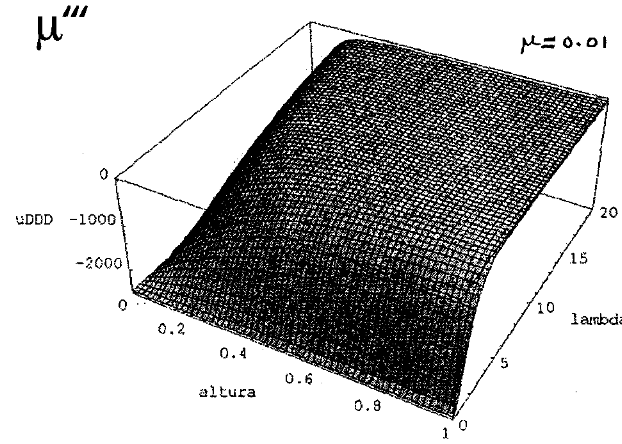


μ''



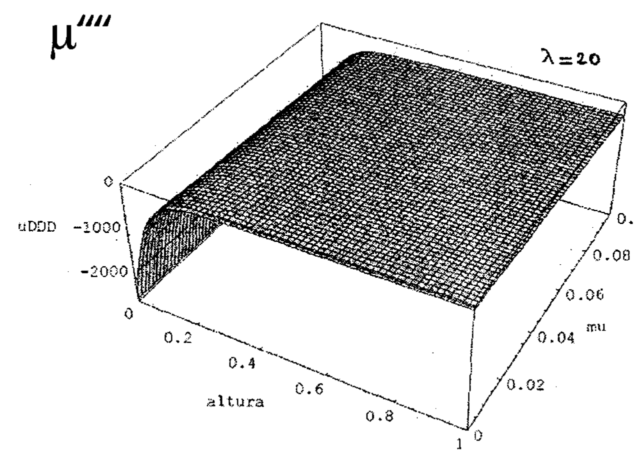
In [1316]:= flDter3DLam [0.01, 0, 1, 0, 20]

μ'''



In [1317]:= flDter3DMu [20, 0, 1, 0, 0.1]

μ''''



Referencias

1. P.F. Hummelgen, M Paparoni. "soluciones del medio continuo aplicables a perfiles de carga generalizadas, a partir de la ecuación diferencial de Murashev, Sigalov, Baykov, Parte 1", Tekhne N°5-2001.
2. V.I. Murashev, E.V. Sigalov, J. Baykov: "Design and Reinforced Concrete Structures", Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1971.
3. N.N. Lebedev, "Special Functions and their Applications", Dover Plubications Inc.,New York, 1971.
4. J.P. Schoutren "Operatorenrechnung mit Anwendungen anf Technische Probleme", Springer Verlag, 1961.
5. H.S. Carslaw , J. C Jaeger. "Operational Methods in Applied Mathematics", Dover Publications Inc., New York, 1963.