

# Un Tratamiento Matemático de la Rigidez Torsional de una Planta de Edificio con Pórticos en Direcciones Arbitrarias

**M. Paparon'**

*Profesor de las Escuelas de ingeniería Civil UNIMET y UCAB. (CID!)*

**P. F. Hummelgens**

*Profesor de Matemáticas, UNIMET y USB*

## RESUMEN

Se presenta una solución matemática para el problema de la determinación del "Momento de Inercia Polar de Rigideces" y del "Centro de Rigidez" en una planta de edificio que posea pórticos en direcciones arbitrarias.

Este problema es de fácil solución cuando los pórticos son ortogonales entre sí pues se obtienen soluciones cerradas (puramente algebraicas). En cambio, las soluciones que se emplean corrientemente para un conjunto de pórticos no ortogonales son de tipo matricial, en las cuales se obtienen resultados para cada caso particular tratado, pero de ellos no es fácil derivar conclusiones generales.

De la colaboración de los dos autores de este trabajo (un ingeniero estructural y un matemático físico) han surgido soluciones relativamente sencillas, representables algebraicamente, que permiten abrir un amplio campo de estudios sobre el comportamiento de edificaciones con pórticos ortogonales o no ortogonales.

Se ha partido de una aplicación del teorema clásico de Pío Alberto Castigliano, de uso frecuente en las disciplinas estructurales, para encontrar formulaciones que proporcionan la posición del centro de rigidez (o centro de torsión) y las direcciones de los ejes principales de flexibilidad de cada planta del edificio. Se presentan también curvas de nivel de las "Superficies de Ener-

gía Elástica" asociadas a los casos tratados. las cuales nos permiten deducir la presencia de "configuraciones estructurales inestables a torsión" por carecer de un centro de rigidez definido o por no poseer "momentos polares de rigideces".

## 1 INTRODUCCIÓN

Al diseñar un edificio capaz de soportar solicitudes sísmicas, se maneja directamente una propiedad de cada losa (o diafragma) que puede interpretarse como "el momento polar de rigideces" de los pórticos que posean trazas en dichos diafragmas (algunas veces se le llama "momento de inercia centrífugo de las rigideces"). Estos conceptos surgen cuando describimos la dinámica de "conjuntos de masas puntuales" o las propiedades seccionales de un miembro sujeto a torsión.

En los cursos clásicos de Mecánica Racional o de Resistencia de Materiales esta propiedad se relaciona con los problemas de rotación de un conjunto de "masas" o de "áreas" alrededor de cierto punto conocido (tratando el problema sólo en un plano). En estos casos las "masas" o las "áreas" pueden ser definidas con precisión con el empleo de sólo 2 coordenadas (además de los valores de masa o área elementales) referidas a cada "masa puntual" o cada "elemento diferencial de área" como ilustra la siguiente figura:

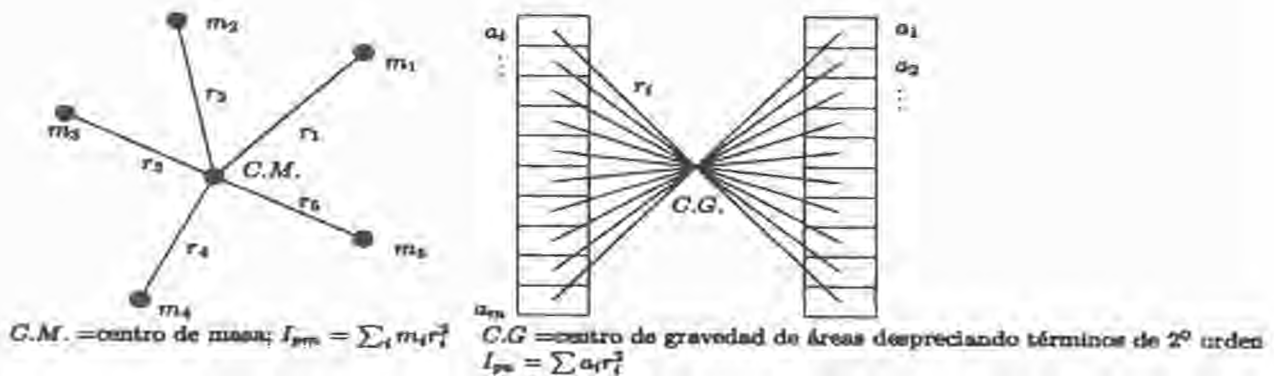


Figura 1:

Cuando nos referimos a edificaciones, esas "masas" o esas "áreas" se convierten en líneas (las trazas de los pórticos sobre el diafragma que consideramos). Esas "trazas", en teoría pueden tener longitud indefinida, ya que si los pórticos se desplazan según esas direcciones, el comportamiento de ese "diafragma" o "planta" de la edificación no cambia. Esto se debe a que desde el punto de vista de ingeniería, las imágenes planas de los pórticos que utilizamos en los cálculos no poseen rigidez alguna ante fuerzas que no estén contenidas en los planos de esas imágenes. Esto se puede mostrar en la figura 2. Debemos entonces postular los siguientes conceptos:

4 Si tomamos en cuenta el teorema de Castigliano (que define un mínimo energético) 1 debe ser un mínimo cuando las distancias  $r_i$  se midan desde la posición del centro de rigidez existente.

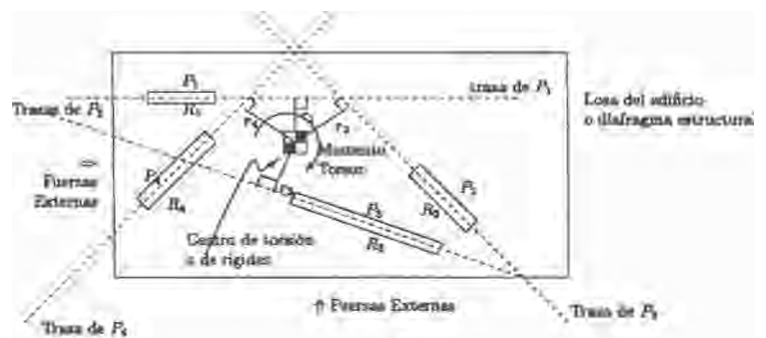


Figura 2:

1 Existe un "centro de rigidez" o "centro de torsión" con las siguientes propiedades:

- a. Cuando la resultante de las fuerzas externas pase por ese centro, el diafragma se traslada sin rotar (la traslación no necesariamente coincide en dirección con la dirección de la fuerza resultante).
- b. Cuando se aplique un momento torsional al diafragma (no importa donde, ni cómo), ocurrirá una rotación pura alrededor de ese centro.

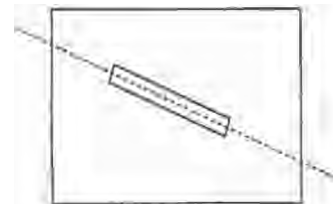
2 Cada pórtico (o pared estructural) posee una rigidez, definida como la magnitud de la fuerza reactiva que genera por unidad de desplazamiento, cuando se impone a ese pórtico un desplazamiento horizontal contenido en el plano del diafragma y en el plano del pórtico.

3 Podemos definir una propiedad del ensamble completo de los pórticos que atraviesen o toquen a un determinado diafragma como sigue:

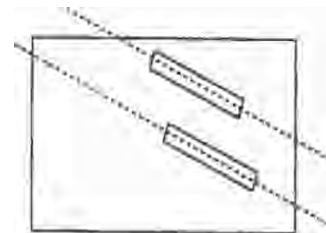
$$I_p = \sum_i R_i r_i^2$$

donde R es la rigidez individual de un pórtico y  $r_i$  distancia normal entre el centro de rigidez y la traza individual de ese pórtico.

Consideremos ahora las siguientes posibilidades:

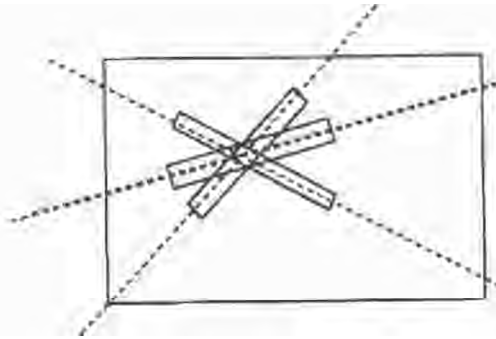


1) Un pórtico singular, orientado en cualquier dirección. Esta configuración es estructuralmente inestable ya que sólo puede oponerse a fuerzas contenidas en el plano (o traza) del pórtico.



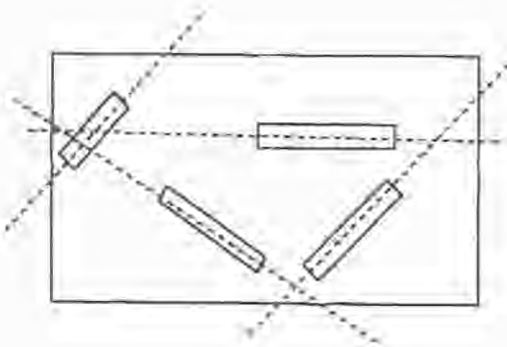
2) Dos pórticos paralelos entre si. Responden solamente en dirección de las trazas. El diafragma posee rigidez Torsional, pero no hay un único centro de rigidez.

dez, sino una sucesión alineada de los posibles centros; la estructura es inestable a la torsión, pues la posición indeterminada del centro de rigidez produce estados de equilibrio "indiferentes".



3) *Tres (o más) Pórticos concurrentes hacia un único punto del diafragma.* La estructura responde a fuerzas en cualquier dirección. La estructura no posee rigidez Torsional.

Ninguno de estos tres casos es estructuralmente aceptable, por lo tanto puede decirse que la condición general de estabilidad puede expresarse de la siguiente manera: Debe haber al menos tres pórticos cuyas trazas no sean concurrentes en el plano del diafragma, como en la figura siguiente:

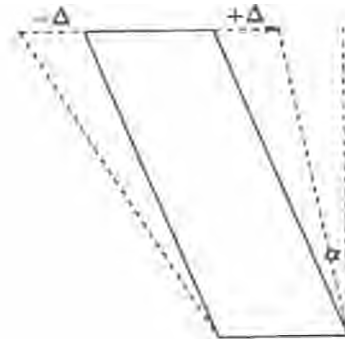


4) *Tres pórticos que no son ni concurrentes ni coplanares entre sí.* El diafragma resulta entonces estructuralmente estable a momentos y a fuerzas aplicadas en su plano.

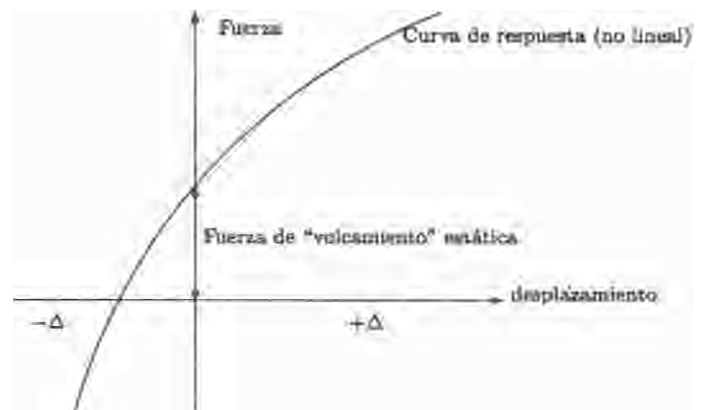
Para encontrar tanto la posición del centro de rigidez como el valor del momento polar de inercia de rigideces, es necesario entonces encontrar el mínimo de la función  $\sum R_i r_i^2$ , variando la posición del centro de rigidez. El momento de inercia polar calculado tomando este punto como centro de rigidez, será el valor correcto para utilizarlo en los cálculos.

Los coeficientes  $R_i$  (coeficientes de rigidez) son cantidades siempre positivas (constantes de resorte). Es posible, sin embargo, suponer que pueda haber  $R_i$  negativos. Es el caso de un pórtico que no sea vertical

sino inclinado (su plano puede seguir siendo vertical), como ocurre en algunos edificios "exóticos". Esta situación se ilustra en la figura siguiente:



Para desplazamientos  $\Delta$  notables o para ángulos  $\alpha$  grandes, este pórtico se comportaría como un péndulo invertido, con ley de variación de respuesta cambiante de signo (o al menos de magnitud, pues no responde linealmente). Si tratamos de desplazar este pórtico hacia la derecha, tendremos una resistencia adicional (de origen gravitacional); lo contrario ocurre si desplazamos hacia la izquierda. La próxima figura ilustra una posible relación de este tipo entre fuerza y desplazamiento:



Recordemos que en todo problema lineal de estructuras, las funciones de energía de deformación se representan por superficies abiertas de segundo grado. Podemos entonces predecir, basándonos en argumentos puramente de ingeniería estructural, que las funciones a minimizar serán de esta naturaleza. También aparecen superficies cerradas de segundo grado (Elipsoides), pero en problemas de tipo diverso a la respuesta de una estructura, p. ej. Como una "superficie de resistencia". (Superficie de Beltrami en teoría de fallas).

A continuación se presenta el desarrollo matemático realizado por el segundo de los autores, aplicado al problema que nos ocupa.

5 ANÁLISIS MATEMÁTICO

Matemáticamente tenemos el problema siguiente. En un plano  $x, y$  (coordenadas cartesianas) tenemos un conjunto de  $N \geq 2$  rectas  $l_1, \dots, l_N$  con ecuaciones

$$l_i: a_i x + b_i y + c_i = 0; \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

donde los coeficientes  $a_i, b_i, c_i$  son conocidos. Queremos determinar un punto (centro de rigidez)  $CR(\xi_0, \eta_0)$  en el plano  $x, y$  tal que la función

$$\phi(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^N R_i [r_i(\xi, \eta)]^2 \rightarrow \min_{\xi, \eta} \quad (2)$$

alcance su valor mínimo en  $(\xi_0, \eta_0)$ . En (2) las constantes positivas  $R_1, \dots, R_N$  son los coeficientes de rigidez de  $l_1, \dots, l_N$  (supuestamente conocidos) y  $r_i(\xi, \eta)$  es la distancia de un punto  $(\xi, \eta)$  en el plano  $x, y$  a la recta  $l_i$ .

Usando la bien conocida fórmula para la distancia de un punto a una recta, obtenemos de (2) que

$$\phi(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^N R_i \frac{(a_i \xi + b_i \eta + c_i)^2}{a_i^2 + b_i^2} \quad (3)$$

Para que  $\phi(\xi, \eta)$  alcance un mínimo en  $(\xi_0, \eta_0)$ , deben satisfacerse las condiciones  $\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0$  en  $(\xi_0, \eta_0)$ .

Aplicando estas condiciones a (3) obtenemos las ecuaciones:

$$2 \sum_{i=1}^N \frac{R_i a_i}{a_i^2 + b_i^2} (a_i \xi + b_i \eta + c_i) = 0$$

$$2 \sum_{i=1}^N \frac{R_i b_i}{a_i^2 + b_i^2} (a_i \xi + b_i \eta + c_i) = 0$$

que llevan al sistema de dos ecuaciones lineales:

$$A_{11} \xi + A_{12} \eta = P_1$$

$$A_{21} \xi + A_{22} \eta = P_2 \quad (4)$$

donde

$$A_{11} = \sum_{i=1}^N \frac{R_i a_i^2}{a_i^2 + b_i^2} \quad A_{12} = \sum_{i=1}^N \frac{R_i a_i b_i}{a_i^2 + b_i^2} \quad (5)$$

$$A_{21} = \sum_{i=1}^N \frac{R_i a_i b_i}{a_i^2 + b_i^2} \quad A_{22} = \sum_{i=1}^N \frac{R_i b_i^2}{a_i^2 + b_i^2}$$

$$P_1 = - \sum_{i=1}^N \frac{R_i a_i c_i}{a_i^2 + b_i^2} \quad P_2 = - \sum_{i=1}^N \frac{R_i b_i c_i}{a_i^2 + b_i^2}$$

Demostremos ahora que el determinante  $D = A_{11} A_{22} - A_{12}^2$  del sistema (4) es siempre no negativo.

Tenemos con (5)

$$D = \left( \sum_{i=1}^N \frac{R_i a_i^2}{a_i^2 + b_i^2} \right) \left( \sum_{j=1}^N \frac{R_j b_j^2}{a_j^2 + b_j^2} \right) - \left( \sum_{i=1}^N \frac{R_i a_i b_i}{a_i^2 + b_i^2} \right) \left( \sum_{j=1}^N \frac{R_j a_j b_j}{a_j^2 + b_j^2} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_i R_j \frac{a_i^2 b_j^2 - a_i b_i a_j b_j}{(a_i^2 + b_i^2)(a_j^2 + b_j^2)} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_i R_j \frac{a_i^2 b_j^2 - a_i b_i a_j b_j}{(a_i^2 + b_i^2)(a_j^2 + b_j^2)} \quad (6)$$

En la última suma tomamos juntos los pares  $(r, j)$  (tomamos  $N \gg 1$ )

$$a_i^2 b_j^2 - a_i b_i a_j b_j + a_j^2 b_i^2 - a_j b_j a_i b_i = a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2 a_i b_i a_j b_j = (a_i b_j + a_j b_i)^2$$

y (6) obtenemos

$$D = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_i R_j \frac{(a_i b_j + a_j b_i)^2}{(a_i^2 + b_i^2)(a_j^2 + b_j^2)} \quad (7)$$

De (7) vemos que  $D \geq 0$ , y además que  $D = 0$  si y sólo si  $a_i b_j = a_j b_i$  para todo par  $(i, j)$  con  $i \neq j$ , es decir, si y sólo si todas las rectas  $l_1, \dots, l_N$  son paralelas. Concluimos entonces que en el caso de que no todas las rectas sean paralelas, estaremos seguros de la existencia de una solución única  $(\xi_0, \eta_0)$  del sistema (4). En este caso tenemos además

$$\begin{vmatrix} \phi_{\xi\xi} & \phi_{\xi\eta} \\ \phi_{\eta\xi} & \phi_{\eta\eta} \end{vmatrix} = 4D > 0$$

con  $\phi_{\xi\xi} = 2A_{11} > 0$ . Por lo tanto en  $(\xi_0, \eta_0)$  la función  $\phi(\xi, \eta)$  alcanza un mínimo. De (4) tenemos

$$\xi_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad (8)$$

$$\eta_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}$$

de donde con (3) podremos calcular el valor mínimo  $\phi(\xi_0, \eta_0)$  de  $\phi(\xi, \eta)$ . De (3) vemos que este valor mínimo será cero si y sólo si todas las rectas pasan por un mismo punto, el cual es entonces  $(\xi_0, \eta_0)$ . En cualquier otro caso tendremos  $\phi(\xi_0, \eta_0) > 0$ .

Sea  $A = (A_{ij})$  la matriz del sistema (4) y sea  $s = A_{11} + A_{22}$  (la traza de  $A$ ), entonces tenemos de (5) que

$$s = \sum_{i=1}^N R_i \quad (9)$$

de modo que una vez se haya calculado  $A_{11}$  (o  $A_{22}$ ) puede obtenerse  $A_{22}$  (o  $A_{11}$ ) más cómodamente de

$$A_{22} = \sum_{i=1}^N R_i - A_{11} \quad \left( A_{11} = \sum_{i=1}^N R_i - A_{22} \right) \quad (10)$$

El número de condición de  $A$  en la norma  $\| \cdot \|_2$  viene dado por

$$K_2(A) = \frac{1}{4D} (s + \sqrt{s^2 - 4D})^2, \quad D > 0 \quad (11)$$

De (7), (9), (11) vemos que cuando todos los coeficientes de rigidez  $R_i$  se multiplican por un mismo factor,  $K_2(A)$  no cambia, mientras que  $D$  queda multiplicado por el cuadrado del factor. En particular  $D$  puede ser muy pequeño (en cuyo caso (8) puede dar resultados muy imprecisos) sin que  $A$  esté mal condicionada ( $K_2(A) \gg 1$ ). Además vemos entonces que serán los coeficientes  $a_i, b_i, c_i$ , los que principalmente influyen sobre la condición de  $A$  y no el tamaño de los coeficientes de rigidez. Con un conjunto dado de coeficientes de rigidez,  $D$  dependerá únicamente de las posiciones relativas de las rectas (y del número de rectas), y será pequeño solamente cuando las rectas sean casi paralelas, que no es el caso que más nos interese. En este caso vemos de (11) que  $A$  estará mal condicionada.

Los coeficientes  $R_i$  tienen la dimensión física  $N/m$ , por lo tanto (2) hace ver que  $\phi(\xi, \eta)$  tiene la dimensión física de energía. Esto invita a llamar a la gráfica de  $\phi(\xi, \eta)$  en un sistema de coordenadas cartesianas  $\xi, \eta, \zeta$ , "superficie energética".

De (3) se sigue que esta superficie viene descrita por la ecuación

$$A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + 2A_{12}\xi\eta - 2P_1\xi - 2P_2\eta + \zeta^2 - \sum_{i=1}^N R_i \frac{c_i^2}{a_i^2 + b_i^2} = 0 \quad (12)$$

La matriz

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

asociada a la parte cuadrática de (12) tiene los autovalores

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 - 4D}), \lambda_2 = \frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 - 4D}), \lambda_3 = 0 \quad (13)$$

Si  $D > 0$ , entonces  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  y (12) representa un *paraboloide elíptico*.

Sea ahora el caso  $D = 0$ . En este caso el sistema (4) tiene infinitas soluciones o no tiene solución. Veremos que el último caso no se presentará. Podemos suponer que por lo menos uno de los coeficientes  $A_{ij}$  o  $A_{ji}$  sea distinto de cero ( $A_{ii} = A_{jj} = 0$ , lo cual implicaría que

$a_i = b_j = 0$  para todo  $i = 1, \dots, N$  y las ecuaciones (1) no representarían rectas). Supongamos por ejemplo que  $A_{11} \neq 0$ . Entonces podemos, de la primera ecuación en (4), despejar  $\xi$ , obteniendo

$$\xi = \frac{P_1 - A_{12}\eta}{A_{11}}$$

y para verificar que esto es consistente con la segunda ecuación de (4) tenemos que comprobar que

$$A_{12} \frac{P_1 - A_{12}\eta}{A_{11}} + A_{22}\eta = P_2$$

o equivalentemente, (usando  $D = 0$ )

$$A_{11}P_2 - A_{12}P_1 = 0 \quad (14)$$

De (5) tenemos

$$A_{11}P_2 - A_{12}P_1 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_i R_j \frac{a_i b_j a_j c_i - a_i^2 b_j c_j}{(a_i^2 + b_i^2) + (a_j^2 + b_j^2)} \quad (15)$$

Tomando juntos los pares  $(i, j)$  y  $(j, i)$  en esta suma y usando  $a_i b_j = a_j b_i$  (como  $D = 0$ , todas las rectas son paralelas), de allí:

$$a_i b_j a_j c_i - a_i^2 b_j c_j + a_j b_i a_i c_j - a_j^2 b_i c_i = (a_i b_j a_j c_i - a_i a_j b_i c_j) + (a_j^2 b_i c_i - a_j^2 b_j c_j) = 0$$

y (15) resulta (14). Similarmente la suposición de  $A_{22} \neq 0$  y el hecho de que  $A_{11}P_1 = A_{12}P_2$  si  $D = 0$ , llevan de nuevo a la consistencia del sistema (4). Concluimos entonces que en el caso de  $D = 0$  (todas las rectas paralelas), el sistema (4) tiene infinitas soluciones  $(\xi_0, \eta_0)$  que forman la recta

$$A_{11}\xi + A_{12}\eta = P_1 \quad (D=0) \quad (16)$$

o equivalentemente  $A_{12}\xi + A_{22}\eta = P_2$

si  $A_{11}, A_{22} \neq 0$ . Si  $A_{11} = 0$ , entonces (16) da la recta  $\eta = \frac{P_2}{A_{22}}$

y si  $A_{22} = 0$ , entonces (16) da la recta  $\xi = \frac{P_1}{A_{11}}$ . Con  $D = 0$ ,

(13) implica que  $\lambda_1 = s > 0$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  y (12) representa un *cilindro parabólico*. Entonces la función  $\phi(\xi, \eta)$  alcanza su valor mínimo sobre la recta (16), siendo este

mínimo igual a  $\phi(0, \frac{P_2}{A_{22}})$  si  $A_{11} \neq 0$  o igual a  $\phi(\frac{P_1}{A_{11}}, 0)$  si  $A_{22} \neq 0$  (ambos valores coinciden cuando  $A_{11}, A_{22} \neq 0$ ).

Regresemos al caso  $D > 0$  (no todas las rectas son paralelas). Las curvas de nivel de  $\phi(\xi, \eta)$  en el pla-

no  $\xi$   $\eta$  son elipses (ya que  $A_{11}^2 - A_{11}A_{22} = -D < 0$ ), todas ellas con el mismo centro  $(\xi_0, \eta_0)$ , dado por (8) y con ejes principales comunes. La fórmula

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}} \right) \quad (17)$$

determina el ángulo  $\alpha$  entre el eje  $\xi$  y uno de los ejes principales de la elipse. Luego las ecuaciones de estos ejes son:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha (\xi - \xi_0) - \cos \alpha (\eta - \eta_0) &= 0 \\ \cos \alpha (\xi - \xi_0) + \operatorname{sen} \alpha (\eta - \eta_0) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Utilizando el programa Mathematica se puede producir un conjunto de curvas de nivel, de las cuales presentamos un ejemplo al final de este artículo. Obtenemos curvas de nivel que representan superficies energéticas, junto con los ejes principales de las mismas, al llamar a `mixedGraphs [t1]` (con un valor seleccionado de `t1`). También se puede producir parte de la superficie, llamando a `surfPlot [s1]` con un valor seleccionado de `s1` centrado en el punto donde  $\phi(\xi, \eta)$  alcanza su mínimo. Llamando a la función `Show` con la opción `ViewPoint`, es posible ver la superficie desde varios puntos de referencia. Llamando a `vista1 [t1, l]` (con valores seleccionados de `t1, l`) se obtiene una vista de la superficie en la dirección del primer eje principal en (18) desde un punto situado verticalmente encima de este eje y a una altura de  $\phi(\xi_0, \eta_0)$  (`minValue` en el programa) sobre el plano  $\xi, \eta$ . La función `vista2 [t1, l]` produce de manera similar una vista en la dirección del segundo eje principal en (18). (no mostramos estas figuras en este trabajo, por razones de espacio).

Hemos visto entonces que existen solamente dos situaciones cualitativamente distintas cuando todos los coeficientes de rigidez son positivos: una si no todas las rectas son paralelas (entonces  $D > 0$ , y la superficie energética es un paraboloides elíptico y existe un único centro de rigidez), otra si todas las rectas son paralelas (entonces  $D = 0$ , y la superficie energética es un cilindro parabólico y  $\phi(\xi, \eta)$  alcanza su mínimo sobre toda una recta, de modo que no existe un verdadero centro de rigidez). En el último caso se podría hablar de un centro de rigidez indiferente. [Nótese que, estructuralmente hablando, puede haber un centro de rigidez, pero ello no implica, automáticamente, el que la estructura sea estable a torsión, tal es el caso de varios pórticos concurrentes a un punto. Comentario del primer autor]

Como hemos observado en la introducción, en ciertas circunstancias tiene sentido tomar en cuenta la posibilidad de coeficientes de rigidez negativos. En este

caso evidentemente se presenta la posibilidad matemática de una superficie con un máximo ( $D > 0, A_{11} < 0$ ) o con un punto de silla ( $D < 0$ ).  $\phi(\xi, \eta)$  puede tomar valores negativos de cualquier magnitud en ambos casos. Esto último no es admisible físicamente (además de que en ambos casos tendríamos un sistema inestable).

Si admitimos solamente superficies  $\zeta = \phi(\xi, \eta)$  con  $\zeta \geq 0$  (energía no negativa), se imponen las condiciones:

$$D > 0, A_{11} > 0 \quad (19)$$

Para la existencia de un único centro de rigidez (observemos que (19) implica  $A_{22} > 0$  también) y además la condición

$$\phi(\xi_0, \eta_0) \geq 0 \quad (20)$$

(Independientemente de (19)) para la solución  $(\xi_0, \eta_0)$  de (4). De (10), ( $s = A_{11} + A_{22}$ ) y (19) tenemos  $s > 0$ , de modo que (13) implica que  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$  y la superficie energética es un *paraboloides elíptico*.

Queda por considerar el caso en que  $D = 0$  y la superficie tiene un mínimo no negativo. En este caso tendremos  $s > 0$ , como muestra el siguiente razonamiento. Si  $s = 0, D = 0$ , entonces  $A_{11} = -A_{22}, A_{11}A_{22} = A_{12}^2 \geq 0$ , que implican que  $A_{22} > 0$ . Entonces (16) da la recta  $A_{11} = A_{22} = A_{12} = 0$ , y el sistema (4) tiene solución solamente si  $P_1 = P_2 = 0$  y (12) se reduce a  $\zeta = \text{constante} \geq 0$  lo que (por (3)) es posible sólo si todos los  $a_i, b_i$  son 0 y por tanto las ecuaciones. Concluimos entonces que  $s > 0$  y ahora (13) implica  $\lambda_1 = s > 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , la superficie es un *cilindro parabólico*.

En conclusión vemos entonces que en todas las situaciones "físicamente admisibles" las superficies energéticas son o paraboloides elípticos o cilindros parabólicos. Cuando  $D = 0$  (situación que se puede presentar aun cuando no siendo todas las rectas paralelas, existan coeficientes de rigidez negativos) puede ocurrir entonces que el sistema (4) no tenga soluciones, pero la suposición adicional de que  $\phi(\xi, \eta)$  alcanza un mínimo, elimina esta posibilidad. En el programa en Mathematica preparado para este trabajo el usuario tiene la posibilidad de averiguar si se trata de un caso físicamente admisible, introduciendo el comando "admisible". El programa contestará con `True` o con `False`. (no incluimos el programa).

**Epilogo:** Este trabajo completa lo realizado en la referencia [2], en donde se encontró (por métodos heurísticos) una regla para determinar las direcciones principales de desplazabilidad de una planta de edificio



con trazas de pórticos en cualquier dirección, y se postuló la condición de mínimo que hemos utilizado para este trabajo.

Por razonamientos de tipo energético se puede concluir también que la dirección de los ejes principales de las elipses de flexibilidad definidas en [2] deben coincidir con las direcciones de los ejes principales de las superficies energéticas que se manejan en este trabajo.

Pensamos que utilizando esta contribución podremos realizar, en trabajos futuros, análisis variacionales de los factores configuracionales o mecánicos que influyan sobre el comportamiento torsional de los edificios. Recordemos que un edificio no es más que una viga *compleja* en voladizo que puede tratarse como sistema, igual que en las vigas clásicas, las cuales ya sabemos manejar como tales por casi 290 años, aunque normalmente sólo expresemos sus comportamientos flexionales o cortantes, sin introducir otros, como los homogéneos, que sin duda siempre están presentes, como en el caso de los pórticos, vistos como vigas complejas (Ver Paparoni, [4])

## REFERENCIAS

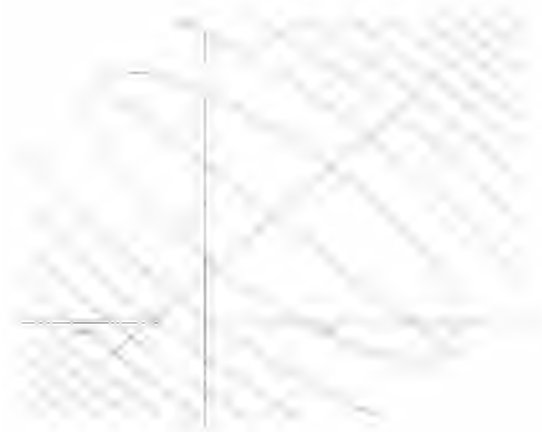
[1] The Theory of Elastic Equilibrium of Systems and its Applications, by Carlo Alberto Pio Castigliano (traducción al inglés del original en francés), Dover Publications Inc. (1966, Fascimile Reprint), Chapters III, VI. Original: Editoriale Federico Negro, Turin, 1879

[2] El Concepto de Núcleo Central en Columnas Extendido al Caso de Edificios con Torsión Sísmica, Trabajo de Grado realizado por: Fernández Arriaga, Carlos Arturo; Paolinetti Carletti, Sergio, UNIMET, Escuela de Ing. Civil (Septiembre 1999). Tutor: M. Paparoni.

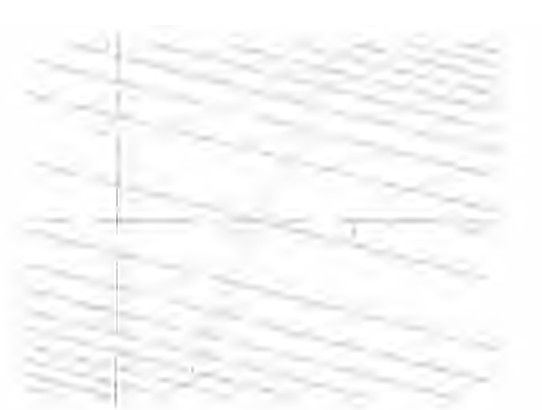
[3] Mecánica de Materiales, R. Gere y S.P. Timoshenko, Grupo Editorial Iberoamérica, Capítulo 12, 1998.

[4] Dimensionamiento de Edificios Altos de Concreto Armado, M. Paparoni, S.A. Sidetur (Sivensa), 1991.

**Fig. 1:**  
**Curvas de Nivel de un Paraboloido Elíptico.**  
**Situación Estable**



**Fig. 2:**  
**Curvas de Nivel de un Cilindro Parabólico. Situa-**  
**ción Inestable**



**Figura 3:**  
**Curvas de Nivel de un Paraboloido Hiperbólico.**  
**Situación Inestable**

