Los tres problemas griegos (sin solución)

*Luis Crespo Ostria**

I Los TRES PROBLEMAS CLÁSICOS DE LA ANTIGUA MATEMÁTICA GRIEGA SON:

La cuadratura del círculo

La duplicación del cubo

La trisección del ángulo

Se trata de construcciones que debían hacerse utilizando *únicamente una regla sin marcas y un compás* (estos eran, según Platón, los instrumentos divinos). Rectas y círculos eran considerados por los filósofos y matemáticos griegos como las curvas perfectas a partir de las cuales todas las demás construcciones deberían ser posibles. Toda solución que utilice otras curvas que no sean rectas ni circunferencias, o una regla con sólo un par de marcas, eran consideradas "soluciones impuras" o "prohibidas".

Cuenta Filoponus que en el año 430A.C. una epidemia de fiebre tifoidea mató a la cuarta parte de la población de Atenas (incluido Pericles); consultado el dios Apolo, respondió por boca del oráculo de Delos (pequeña isla sobre el Egeo, que no debe ser confundida con Delfos, ciudad de la antigua Grecia) que cesaría la epidemia cuando hubieran cambiado u altar, que tenía forma cúbica, por otro nuevo cuyo volumen fuera el doble. Los atenienses procedieron a construir un nuevo cubo cuyas aristas eran el doble de las anteriores, con lo que el nuevo altar tenía un volumen 8 veces mayor, provocando la justa irritación del dios Apolo. Desesperados los atenienses recurrieron al consejo de Platón, quien les hizo ver que si el 1 er cubo tenía aristas de longitud "a", el cubo nuevo debería tener arista "x" tal que $x^3 = 2 a^3$ (en notación moderna x = a). ¿ Será posible, dado el segmento "a" obtener con regla sin marcas y compás el segmento x = a?

Hicieron falta más de 2.200 años para demostrar que los tres problemas son insolubles mediante el uso de regla sin marcas y compás solamente. El primero en expresar sus dudas fue Descartes en 1637.

A causa de la relación del 2° problema con el oráculo de Delos (hay otra versión de Eratóstenes que relaciona el problema con otros personajes), aquél, y por extensión, los otros dos, se conocen con el nombre de "problemas délicos".

II ¿POR QUÉ ESTOS PROBLEMAS SON IRRESOLUBLES?

Observemos en primer lugar que las construcciones geométricas con regla sin marcas y compás corresponden a operaciones racionales (suma, resta, multiplicación y división) entre segmentos y raíces cuadradas de segmentos. Dados dos segmentos de longitudes "a" y "b" (medidos con un segmento "unidad" dado), es inmediato construir a+b, a-b, ab, a/b a a (donde "r"es cualquier n° racional). Para hallar *Va* basta obtener la media proporcional entre los segmentos "1" y "a". Dados tres segmentos a, b, x, con el auxilio de la regla y el compás se puede construir a+b E (segmento *construible* de 1 er orden). Aplicando regla y compás a segmentos como a+b x, c+d J3 , e+ f se construye fácilmente a+b + (c+d) *Ve+frz* (segmento *construible* de 2° orden), y siguiendo de igual manera obtenemos más y más segmentos.

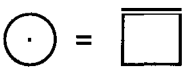
Pero, con este procedimiento sólo conseguimos meter raíces dentro de raíces cuadradas. ¡Lo que nunca resulta es una raíz cúbica!

Ing. Industrial de la Universidad Mayor de San Andrés, La Pa; Bolivia. Profesor, Facultad de Ingeniería, Universidad Católica André Bello.

(III) En 1837, el francés Pierre Wantzel (1814-48) obtuvo las condiciones necesarias y suficientes para resolver una ecuación algebraica de coeficientes racionales con los instrumentos clásicos.

En particular, si una ecuación de Ser grado con coeficientes racionales no tiene raíz racional, ninguna de sus raíces es *construible* con instrumentos clásicos.

La Cuadratura del Círculo



Radio: R Área: 7r R^2

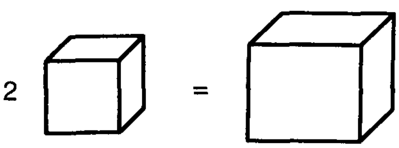
Área = rc R^2 Lado: R *In*

Para "construir" el segmento ¯jr, debería ser *"construible"* 7E, pero n no es expresable por raíces cuadradas (= ir no es algebraico n es trascendente).

La trascendencia de n fue demostrada por F. Lindeman (1852-1939) en 1882.

La Duplicación del Cubo

Volvamos al altar de Apolo:



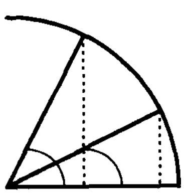
Volumen: l^3 Volumen: Si I = 1

$2\,l3 = x^3$ $x^3 = 2$

Arista: I Arista: x x =J (no es *construible)*

La Trisección del Ángulo

Cada ángulo queda caracterizado por su coseno:



Radio=1

$a = OA = \cos\ \varphi$

$x = OB = \cos\ \frac{\varphi}{3}$

α

a/3

O A B

Se sabe que: cos 9 = 4 $[\cos!.)^3$ −3 cos

Osea: $a=4x^3-3x$ no tiene raíces reales, en general.

Por ej.: si cp = 60° = a = cos 60° = $\frac{1}{2}$

$4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$

$8x^3 - 6x = 1$

Cambiando variable: z = 2x $z^3 - 3z = 1$ (1)

(1) no tiene raíces(raíz racional) Si $z = \frac{r}{s}$ (r,s primos entre sí) $\frac{r}{s}^3 - 3\frac{r}{s} = 1$ ó $r^3-3rs^2=s^3$ $s^3=r(r^2-3s^2)$ "r" divide a "s"

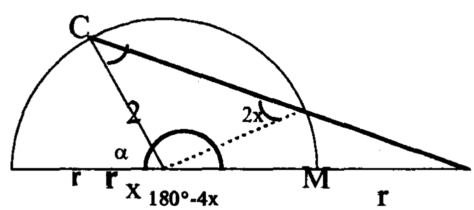
Contradicción

I.q.q.d.

Utilizando curvas prohibidas —o trazadas por instrumentos prohibidos— hay innumerables soluciones que trisecan un ángulo cualquiera.

Parece que la solución más antigua es la de Hippias de Elis (aprox. 420. A.C.) que triseca un ángulo cualquiera mediante la "trisectriz" (o "cuadratriz" porque resuelve también el problema de la cuadratura del círculo) cuya ecuación, en coordenadas polares, es *r= ²ª 0.cosecO.*

Pappus, Descartes, Newton, Clairaut, Chaslesyotros han resuelto el problema (soluciones impuras, claro está), pero la más elegante sigue siendo la de Arquímedes (aprox. 287-212 A.C.), que es la que sigue:



x N

A B

Sea *¿ABC*= a sobre la regla se hacen dos marcas (prohibidas) que son **M** y N, tales que **MN =** r.

El segmento sobre la regla MN = r se llama, según los griegos, una *neusis* (inserción) de longitud "r".

Demostración

$$\alpha + (180^\circ - 4x) + x = 180^\circ$$

$$\alpha - 3x = 0$$

$$x = \frac{\alpha}{3}$$

l.q.q.d.

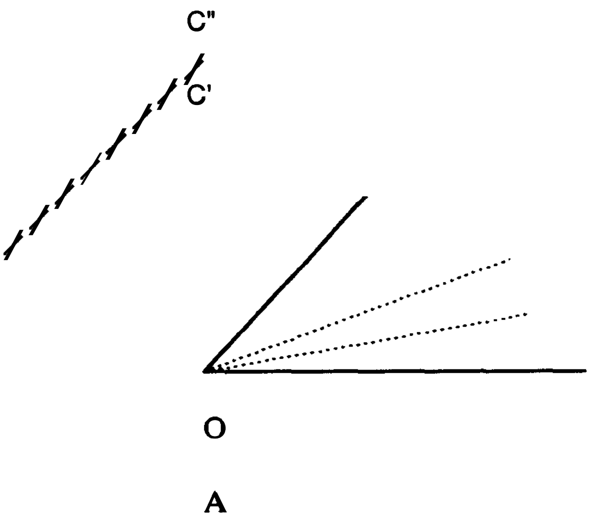
Problema

Sea

B $\angle AOB = \alpha$ $\angle COC' = \alpha/8$

$\angle AOC = \frac{\alpha}{2}$ $\angle C'O\,C'' = \alpha/16$

C $\angle COC = \alpha/4$ — — — — —

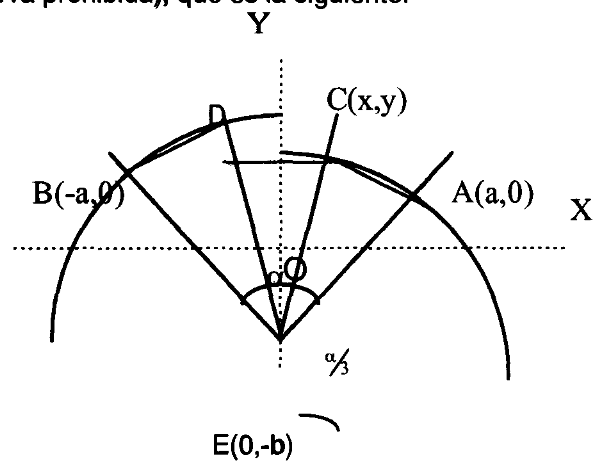


Bisectando cada ángulo a partir de α, sumando y restando alternadamente se obtiene:

$$\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{8} - \frac{\alpha}{16} + \frac{\alpha}{32} - \frac{\alpha}{64} + \ldots\ldots\ldots = \frac{\alpha}{3}$$

¡¡Conseguimos trisecar sólo con regla sin marcas y compás!!¿ ?

El estudiante de Ingeniería de la UCAB, Tomás Enrique Velázquez, ha encontrado una solución al problema de la trisección de un ángulo, valiéndose de una circunferencia (curva aprobada por Platón) y una hipérbola (curva prohibida), que es la siguiente:



El problema se reduce a conseguir el punto C, sobre el arco de circunferencia AB, tal que

$$\angle AEC = \frac{1}{3}\angle AEB, \text{ o sea } = \angle AEC = \frac{1}{3}\alpha$$

Es evidente que el punto C debe cumplir con dos condiciones:

(1ª) C pertenece a una circunferencia de centro E

(2ª) C dista de A el doble de lo que dista del eje de ordenadas $\vec{y}$

La 1ª condición nos lleva a:

$$x^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2 \qquad (1)$$

La 2ª condición dice:

$$2d(C, \vec{y}) = d(C, A)$$

$$2x = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$4x^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2$$

$$3x^2 + 2ax - y^2 - a^2 = 0$$

$$3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{4}{3}a^2$$

$$\frac{\left(x + \frac{a}{3}\right)^2}{\left(\frac{2a}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1 \qquad (2)$$

El punto C es la intersección de la circunferencia (1) y la hipérbola (2).

BIBLIOGRAFÍA:

BOYER, CARL. B.: *A History of Mathematics* Edit. John Wiley, New York 1968

BOURBAKI, NICOLAS: *Elementos de Historia de las Matemáticas* Edit. Alianza Universidad, Madrid 1972.

COURANT & ROBBINS: *¿Qué es la matemática?* Edit. Aguilar, Madrid 1955

DÓRRIE,HEINRICH: *100 Great problems of mathematics. Their history and solution* Edit.Dover, New York 1965

KLINE,MORRIS: *Mathematics in WesternCulture* Edit. Penguin Books,New York 1979.

REY PASTOR, J.: *Lecciones de Álgebra.* Edit. Nuevas Gráficas, Madrid 1957