Estudio de las condiciones de borde para la ecuación diferencial de Murashev Sigalov Baykov

- Peter Hummelgeus
- Mario Paparoni

1. Introducción

La ecuación diferencial para la deflexión $y(x)(0 \leq x \leq H)$ de un pórtico de altura H bajo la acción de una carga horizontal $q(x)$ (N/m) viene dada por ([1])

$$Ky^4(x) - C(1+\mu)y''(x) = q(x) + \frac{C}{K_0}M(x); \quad 0 \leq x \leq H \quad (1)$$

Donde $K, K_0\ y\ C$ son parámetros de rigidez, $\mu = \frac{K}{K_0}$ $y\ M(x)$ el momento inducido por la carga $q(x)$ a la altura x. Introduciendo las nuevas variables $\varepsilon = \frac{x}{H}$; $\mu(\varepsilon) = Ky(H\varepsilon)$ y los parámetros $S^2 = \frac{K}{C(1+\mu)} (S>0)$, $\lambda = \frac{H}{S}$ y escribiendo $\tilde{f}(\varepsilon) = f(H\varepsilon)$ para funciones $f(x)$, (1) se transforma en:

$$\mu^4(\varepsilon) - \lambda^2\mu''(\varepsilon) = g(\varepsilon); \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (2)$$

$$g(\varepsilon) = H^4\tilde{q}(\varepsilon) + \frac{\lambda^2 H^2 \mu}{1+\mu}\tilde{M}(\varepsilon)$$

$$\tilde{M}(\varepsilon) = -H\int_\varepsilon^1 \tilde{Q}(\eta)d\eta = H^2\int_\varepsilon^1 (\varepsilon - \eta)\tilde{q}(\eta)d\eta \quad (3)$$

$$\tilde{Q}(\varepsilon) = H\int_\varepsilon^1 \tilde{q}(\eta)d\eta \text{ (cortante)}$$

En [1] hemos utilizado las condiciones de borde

$$\mu(0)=0;\ \ \mu'(0)=0;\ \ \mu''(1)=0;\ \ \mu'''(0)=-H^{3}\widetilde{Q}(0) \quad (4)$$

Las primeras dos condiciones dicen que la base $\varepsilon=0$ está empotrado, la tercera condición expresa que el momento interno es cero en el tope $\varepsilon=1$ y la cuarta condición significa que en la base la derivada del momento interno es igual a la carga total. Las mismas condiciones (4) en la literatura, como por ejemplo [2], [3].

Aunque las condiciones (4) son razonables desde un punto de vista de la ingeniería estructural, pueden contemplarse otros conjuntos de condiciones de borde también razonables. El objetivo del presente trabajo es de profundizar en esta materia.

Una pregunta inmediata es por ejemplo: ¿Cuáles son las condiciones para un extremo libre en $\varepsilon=1$? (observamos que (4) consiste de tres condiciones en la base y una sola condición en el tope). Una vía para obtener estas condiciones es la de formular un problema variacional cuya ecuación de Euler-Lagrange coincida con la ecuación diferencial (1): las condiciones de extremo libre son entonces las condiciones naturales del problema variacional en este extremo. Según un principio general, el problema variacional expresa la minimización de la energía potencial total. Otra manera para obtener las condiciones de extremo libre y otros conjuntos de condiciones de borde de interés es el estudio del operador diferencial $A=\frac{d^{4}}{d\varepsilon^{4}}-\lambda^{2}\,d^{2}/d\varepsilon^{2}$ (que figura en (2)) sobre un conjunto de funciones $\phi\in C^{4}([0,1])$ que satisfacen ciertas condiciones de borde en $\varepsilon=0$ y $\varepsilon=1$, buscando aquellas condiciones de borde que hacen de un operador autoconjugado.

2. El Operador A, extremo libre en $\varepsilon=1$

Definimos el producto interno de dos funciones $f(\varepsilon), g(\varepsilon)$ por $(f,g)=\int_0^1 f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon$ (el producto interno estándar en . Tenemos integrando por partes repetidamente,

$$(A\phi,\psi)=\int_0^1 \phi^{4}\psi\ d\varepsilon=\lambda^{2}\int_0^1 \phi''\psi\ d\varepsilon$$

$$[\phi'''\psi]_0^1-\lambda^{2}[\phi'\psi]_0^1-\int_0^1 \phi'''\psi'\ d\varepsilon+\lambda^{2}\int_0^1 \phi'\psi'\ d\varepsilon$$

$[\phi'''\psi]_0^1-\lambda^{2}[\phi'\psi]_0^1-[\phi''\psi']_0^1+\int_0^1 \phi''\psi''d\varepsilon+\lambda^{2}\int_0^1 \phi'\psi'd\varepsilon$, es decir

$$(A\phi,\psi)=[\phi'''\psi]_0^1-\lambda^{2}[\phi'\psi]_0^1-[\phi''\psi]_0^1+\int_0^1 \phi''\psi''d\varepsilon+\lambda^{2}\int_0^1 \phi'\psi'd\varepsilon \quad (1)$$

Continuando la integración por partes obtenemos de (1) finalmente

$$(A\phi;\psi)=(\phi;A\psi)+[\phi'''\psi-\phi\psi''']_0^1+[\phi'\psi''-\phi''\psi']_0^1+\lambda^{2}[\phi\psi'-\phi'\psi]_0^1 \quad (2)$$

Imponiendo las condiciones

$$\mu(0)=0,\ \ \mu'(0)=0 \quad (3)$$

para $\mu=\phi$ y $\mu=\psi$, los términos
$[\phi'''\psi-\phi\psi''']_0^1+[\phi'\psi''-\phi''\psi']_0^1+\lambda^{2}[\phi\psi'-\phi'\psi]_0^1$
en (2) producen la expresión:

$$C(\phi,\psi)=[\phi'''(1)-\lambda^{2}\phi'(1)]\psi(1)-[\psi'''(1)-\lambda^{2}\psi'(1)]\phi(1)+\phi'(1)\psi''(1)-\phi''(1)\psi'(1) \quad (4)$$

Además, con (3) la relación (1) se simplifica a

$$A(\phi,\psi)=[\phi'''(1)-\lambda^{2}\phi'(1)]\psi(1)-\phi''(1)\psi'(1)+\int_0^1 \phi''\psi''d\varepsilon+\lambda^{2}\int_0^1 \phi'\psi'd\varepsilon \quad (5)$$

De (4), (5) vemos que (1), (2) se simplifica a

$$A(\phi,\psi)=\int_0^1 \phi''\psi''d\varepsilon+\lambda^{2}\int_0^1 \phi'\psi'd\varepsilon \quad (6)$$

$$A(\phi,\psi)=(\phi,A\psi) \quad (7)$$

Respectivamente si $\phi(\varepsilon),\psi(\varepsilon)$ cumplen las condiciones de borde (incluyendo (3))

$$\mu(0)=0,\ \mu'(0)=0,\ \mu''(1)=0,\ \mu'''(1)-\lambda^{2}\mu'(1)=0 \quad (8)$$

La relación (7) dice que A es un operador autoconjugado cuando su dominio D_A consiste de todas las $\mu\in C^{4}([0,1])$ que satisfacen las condiciones de borde (8). De (6) se sigue que $(A\phi,\phi)>0$ para todo $\phi\in D_A, \phi\neq 0$ (es decir A es un operador positivo). De hecho (6) implica que

$$(A\phi,\phi)=\int_0^1 [\phi''(\varepsilon)]^{2}d\varepsilon+\int_0^1 \phi'[(\varepsilon)]^{2}d\varepsilon\geq 0,\ \ \phi\in D_A,\ y$$

$$(A\phi,\phi)=0\rightarrow\int_0^1 [\phi'(\varepsilon)]^{2}d\varepsilon=0\rightarrow\phi'(\varepsilon)=0 \text{ en } 0\leq\varepsilon\leq 1 \quad (9)$$

$\phi(\varepsilon) =$ constante en $0 \leq \varepsilon \leq 1,$

Pero como $\phi(0) = 0$ la constante tiene que ser 0, es decir $\phi = 0$, lo que demuestra la afirmación. Como consecuencia todos los autovalores de A (con su dominio D_A) son positivos ya que siendo ϕ una autofunción correspondiente al autovalor υ tenemos $\upsilon = \dfrac{(A\phi,\phi)}{\|\phi\|^2}\left(\|\phi\|^2 = (\phi,\phi)\right)$. De (7) se sigue fácilmente que autofunciones $\phi_1(\varepsilon), \phi_2(\varepsilon)$ correspondientes a autovalores distintos son ortogonales (es decir $(\phi_1, \phi_2) = 0$). En (4) encontramos los autovalores y autofunciones numéricamente según la teoría general de los problemas tipo Sturm-Liouville todos los autovalores son simples y las autofunciones forman un sistema ortogonal y completo (una base ortogonal) en $L^2(0;1)$. Estas propiedades permiten obtener la solución de 1.(2) bajo las condiciones (8) en la forma de una serie de Fourier en las autofunciones.

Veamos ahora la relación entre las condiciones (8) y 1.(4). Integrando la ecuación diferencial 1.(2) con respecto a ε de $\varepsilon = 0$ a $\varepsilon = 1$ y tomando en cuenta $\mu'(0) = 0$ y 1.(3), resulta que

$$\mu'''(1) - \lambda^2\mu'(1) = \mu'''(0) + H^3\widetilde{Q}(0) + \frac{\lambda^2 H^2 \mu}{1+\mu}\int_0^1 \widetilde{M}(\varepsilon)d\varepsilon$$

De (9) vemos que 1.(4) y (8) son equivalentes solamente en el límite $\mu \to 0$

A continuación veremos como las últimas dos condiciones en (8) surgen como condiciones naturales en $\varepsilon = 1$ para un problema variacional. Sea S la clase de las $\phi \in C^4([0;H])$ que satisface (3) (con μ reemplazada por ϕ). No imponemos condiciones de borde en $x = H$, consideremos el funcional $F : S \to \Re$ definido por

$$F[\phi] = \frac{1}{2}\int_0^H \left[K(\phi''(X))^2 + C(1+\mu)(\phi'(X))^2 - 2\left\{q(x) + \frac{C}{K_0}M(x)\right\}\phi(x)\right]d(x) \quad (10)$$

Y representando la energía potencial total del sistema cuando en el estado de deflexión $\phi(x)$. Según un principio físico general, la correspondiente deflexión $y(x)$ bajo la acción de la carga $q(x)$ (y dependiendo además de las posibles condiciones de borde impuestas) es la $\phi \in S$ que minimiza F sobre S. Es decir $F[\phi]$ alcanza su valor mínimo precisamente cuando $\phi = y$.

Consideremos variaciones alrededor de $y(x)$ de la forma

$$\phi(x) = y(x) + \varepsilon\,\eta(x);\ 0 \leq x \leq H \quad (11)$$

Donde $\eta \in C^\infty(0;H)$ con soporte compacto sop $\eta\, C(0;H)$. Observemos que $\phi \in S$ y $\phi = y$ para $\varepsilon = 0$ siendo ε un parámetro real en un intervalo abierto alrededor $\varepsilon = 0$. Como $y(x)$ debe minimizar F sobre el conjunto de las $\phi(x)$ de la forma (11), la función real $\widetilde{F}(\varepsilon) = F[y + \varepsilon\eta]$ de la variable real ε debe alcanzar un mínimo en $\varepsilon = 0$, lo que implica que

$$\frac{d\widetilde{F}}{d\varepsilon}(0) = 0 \quad (12)$$

Tenemos de (10)

$$\widetilde{F}(\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_0^H \left[K(y'' + \varepsilon\eta'')^2 + C(1+\mu)(y' + \varepsilon\eta')^2 - 2\left\{q + \frac{C}{K_0}M\right\}(y + \varepsilon\,\eta)\right]dx,$$

de donde con (12) tenemos

$$\int_0^H \left[Ky''\eta'' + C(1+\mu)\,y'\eta' - q\eta - \frac{C}{K_0}M\eta\right]dx = 0,$$

Y luego vía integración por partes (13)

$$K\left[y''\eta' - y'''\eta\right]_0^H + C(1+\mu)\left[y'\eta\right]_0^H + \int_0^H \left[Ky^{(4)} - C(1+\mu)y'' - q - \frac{C}{K_0}M\right]\eta d(x) = 0$$

Para los $\eta(x)$ considerados en (11), los términos $K\left[y''\eta' - y'''\eta\right]_0^H + C(1+\mu)\left[y'\eta\right]_0^H$ en (13) son cero, de modo que (13) implica que

$$\int_0^H \left[Ky^{(4)} - C(1+\mu)y'' - q - \frac{C}{K_0}M\right]\eta d(x) = 0$$

Para todo $\eta(x)$ considerados según el lema fundamental del cálculo de variaciones concluimos que se cumple 1.(1), apareciendo ahora como la ecuación de Euler-Lagrange de nuestro problema variacional.

Ahora observamos que en (11) podemos permitir funciones $\eta \in C^4([0;H])$ que junto con sus derivadas pueden tomar valores arbitrarios en $x = H$ ya que no impusimos condiciones de borde en $x = H$. Con estas $\eta(x)$ obtenemos nuevamente (13), donde ahora por 1.(1) la integral es cero y solamente queda:

$$K\left[y''\eta' - y'''\eta\right]_0^H + C(1+\mu)\left[y'\eta\right]_0^H = 0,$$

De donde con $\eta(0)=0,\ \eta'(0)=0$ se sigue que

$$Ky''(H)\eta'(H)+\left[C(1+\mu)y'(H)-Ky'''(H)\right]\eta(H)=0$$

Y luego por la arbitrariedad de $\eta(H),\ \eta'(H)$ que

$$y''(H)=0,\ \ C(1+\mu)y'(H)-Ky'''(H)=0 \qquad (14)$$

Transformando a las variables *ε, μ(ε)* vemos que (14) es equivalente con las últimas dos condiciones de borde en (8). Encontramos entonces que estas condiciones son las condiciones naturales en $\varepsilon=1$ para nuestro problema variacional y corresponde con la ausencia de condiciones impuestas en , lo que puede expresar diciendo que $\varepsilon=1$ es un "extremo libre".

3. Otras condiciones de borde

Otro conjunto razonable de condiciones de borde está dado por

$$\mu(0)=0,\ \mu'(0)=0,\ \mu(1)=0,\ \mu'(1)=0 \qquad (1)$$

(Ambos extremos empotrados).De 2. (1), 2. (4) vemos que con las condiciones (1) tenemos de nuevo 2. (6) y 2. (7) (ya que $C(\phi,\psi)=0$ en 2. (4)). Como consecuencia tenemos en este caso las mismas propiedades de los autovalores y las autofunciones como mencionados en la sección 2 (pero con otros autovalores y otras autofunciones). Otros conjuntos de condiciones de borde que producen 2.(6) y 2.(7), son por ejemplo:

$$\mu(0)=0,\ \mu'(0)=0,\ \mu(1)=0,\ \mu''(1)=0 \qquad (2)$$

$$\mu(0)=0,\ \mu'(0)=0,\ \mu'(1)=0,\ \mu'''(1)=0 \qquad (3)$$

Consideremos las condiciones

$$\mu(0)=0,\ \mu'(0)=0,\ \beta'\ \mu'(1)+\beta''\ \mu''(1)=0,\ \mu'''(1)-\lambda^2\mu'(1)=0 \quad (4)$$

Donde $(\beta',\beta'')\neq(0{,}0)$. Con estas condiciones tenemos $C(\phi,\psi)=0$ en 2.(4), de modo que obtenemos nuevamente 2.(7) y la ortogonalidad de autofunciones correspondientes a distintos autovalores, las autofunciones formando una base ortogonal de $L^2(0;1)$. Observemos que 2.(8) es un caso particular $(\beta'=0,\beta''=1)$ de (4), pero que en el caso general puede ser que 2.(6) no se cumple. Notamos que con la arbitrariedad de la selección de β',β'',(4), produce un conjunto infinito de condiciones de borde.

Hasta ahora hemos considerado únicamente condiciones de borde no mixtas (es decir en cada condición está involucrado un solo extremo). Para las condiciones mixtas

$$\mu(0)=\mu(1),\mu'(0)=\mu'(1),\mu''(0)=\mu''(1),\ \mu'''(0)=\mu'''(1) \quad (5)$$

Tenemos 2.(6) y 2.(7) (estas son condiciones periódicas). Muchas más condiciones mixtas pueden construirse artificialmente, pero nos parece un ejercicio inútil considerarlas en extenso.

Finalmente queremos hacer algunas observaciones sobre las condiciones 1.(4). A primera vista la condición $\mu'''(0)=-H^3\widetilde{Q}(0)$ para indicar que diferentes cargas $q(x)$ inducen diferentes condiciones de borde (ya que $\widetilde{Q}(0)=H\int_0^1\widetilde{q}(\eta)d\eta$ según 1.(3). Sin embargo podemos dividir ambos miembros de la ecuación diferencial 1.(2) por $\widetilde{Q}(0)$, obteniendo una ecuación diferencial equivalente en $v(\varepsilon)=\dfrac{\mu(\varepsilon)}{\widetilde{Q}(0)}$ y las condiciones de borde $v(0)=0, v'(0)=0, v''(1)=0, v'''(0)=-H^3$, donde no aparece el cortante.

En la sección 2 encontramos que las condiciones $\mu''(1)=0,\ \mu'''(0)=-H^3\widetilde{Q}(0)$ en 1.(4) no corresponden a un extremo libre en $\varepsilon=1$, si no que éstas están dadas por las últimas dos condiciones en 2.(8). Por 2.(9), $\mu'(0)=0$, si la condición $\mu'''(0)=-H^3\widetilde{Q}(0)$ es equivalente con la condición

$$\mu'''(1)-\lambda^2\mu'(1)=\frac{\lambda^2H^2\mu}{1+\mu}\int_0^1\widetilde{M}(\varepsilon)d\varepsilon \qquad (6)$$

A base de estas observaciones nos parece de interés repetir nuestros estudios anteriores empleando las condiciones 2.(8) en lugar de 1.(4).

Finalmente observamos que las condiciones de borde 2.(8) tienen aplicación en el estudio de los modos fundamentales del problema dinámico.

Este es un trabajo que termina aquí, constituye un ejercicio para buscar otras condiciones de bor-

de aplicables a la ecuación diferencial que hemos manejado en trabajos anteriores, ejercicio éste que se deja para publicaciones posteriores.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Murashev V.I.; Sigalov E.V.; Baykov J."Design of Reinforced Concrete Structures" Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, 1971.

[2] Paparoni Mario "Predimensioning of Tall Reinforced Concrete Buildings" Presented to A.C.I. Convention, Puerto Rico, December 1980.-Later published in a Spanish Version in the I.M.M.E. Bulletin N° 72-73 pp 101-164 U.C.V.- Caracas Venezuela. 1983 (Jan-Dec).

[3] Casadei, Rosanna "Predimensionamiento de Edificios Altos Apantallados" UCLA, Barquisimeto-Noviembre 1983.

[4] Cantelmi, Bruno; Gil Alonso; Goncalves, Donaldo. "Estudio de combinaciones Tipicables para Edificios Mixtos y Complejos"(Combinaciones de Pórticos y Pantallas)-U.C.V.-Octubre 1986.

[5] Mercado M., Zoraima; Sierra M., Emilio; Rojas R. Angel R. "Análisis de las Ecuaciones del Método del Medio Continuo Equivalente para el Dimensionamiento de Edificios, haciendo uno de calculadora de bolsillo programables en BASIC" U.C.V.-Junio 1987.

[6] Kameo, Aharón; Sanz, Carlos, "Problemas de Deriva Sísmica en Edificios. Estudio Paramétrico de las Variables Sistémicas que inciden sobre la Deriva de un Pórtico" UNIMET-Septiembre 1988.

[7] Akel, Gamal; Barreiro B.,Foraco, Andrés. "Análisis de una Población de Estructuras Semi-Prismáticas por los Métodos del Continuo Equivalente y Discretos" U.C.V.-Septiembre 1988.

[8] Fuentes C. Eyslen; Pereira, Wilfren. "Estudio de las Soluciones del Método del Medio Continuo para Estructuras de Bajo Acoplamiento" U.C.V.-1988 (Tratamiento Matemático del Problema).

[9] Bonato P.; Leonardo.;Patrocinio A., Yajaira C."Compendio de Medios Gráficos de Variables Configuracionales para el Predimensionado de Estructuras Aporticadas." UNIMET-Septiembre 1989.

[10] Gonzalez R., Claudio A.;Gutiérrez C.; Oscar J.; Saputelli M. Fabrizio."El haz y la Celda en un Pórtico, Investigación Experimental para su Validez". UNIMET-Abril 1990.

[11] Melandri Majónica, Mónica" verificación Matricial de Variables Configuracionales en Estructuras Aporticadas" UNIMET-Septiembre 1991.

[12] Paparoni Mario "Predimensionamiento de Edificios Altos de Concreto Armado" (Libro) Ediciones SIDETUR-Caracas- Venezuela- Febrero 1991.

[13] Casadei Rosanna "Variables determinantes en la obtención de la capacidad sismoresistente de una estructura aporticada de concreto armado", Universidad Centro Occidental "Lisandro Alvarado". Decanato de Ingeniería Civil.