

IMPACTO DEL CARÁCTER ALEATORIO DE LA TASA DE INTERÉS Y
LA MORTALIDAD EN EL PRECIO DE LAS ANUALIDADES CIERTAS
(*MODELING CERTAIN ANNUITIES VALUED IN LIFE – EXPECTANCY*)

*Evaristo Diz**

Resumen del Contenido:

Este trabajo trata sobre el impacto que tienen las variables aleatorias “mortalidad” y “tasa de interés” sobre el valor de una anualidad. El análisis de sensibilidad no estocástico para la mortalidad y el interés produce una sobreestimación del precio de la anualidad generando primas puras relativamente mayores.

Este estudio hace énfasis en el uso de la Simulación Montecarlo para medir las diferencias de precios bajo dos escenarios básicos:

- Certidumbre con respecto a la expectativa de vida y la tasa de interés (Caso Base)
- Incertidumbre con respecto a ambos parámetros (Caso Alternativo)

Summary of Content:

This paper is about the determination of the impact in annuity pricing based on mortality experience and interest rate volatility when an certain due annuity is valued for a fixed time equivalent to life expectancy. Non-stochastic sensitivity analysis for mortality and interest rates yields and price annuity overestimation, as a consequence pure premiums are relatively higher.

In this paper is put emphasis in using Montecarlo Simulation in order to measure the prices differences under two basic scenarios:

- Certainty of life expectancy and interest rate (Base Case)
- Uncertainty in both parameters (Alternative Case)

Palabras Claves:

Tasa de interés – Mortalidad – Anualidades ciertas - Expectativa de vida – Simulación de Monte Carlo – Distribuciones de Probabilidad – Teoría de la Supervivencia

* Evaristo Diz: el autor es Licenciado en Física y Matemáticas (Educación) de la UCAB, con Maestría en Sistemas de Información (UCAB), Maestría en Administración de Empresas (UCAB), Especialidad en Estadística Computacional (USB), Maestría en Estadística (USB); actualmente se desempeña como Presidente de E. Diz Actuarial Services and Consulting.

IMPACTO DEL CARÁCTER ALEATORIO DE LA TASA DE INTERÉS Y LA MORTALIDAD EN EL PRECIO DE LAS ANUALIDADES CIERTAS
(MODELING CERTAIN ANNUITIES VALUED IN LIFE – EXPECTANCY)

Evaristo Diz

SUMARIO: I.-MODELO DE VALORACIÓN DE UNA ANUALIDAD CIERTA PREPAGADA; II. SUPUESTOS DEL MODELO; III. ANÁLISIS DE RESULTADOS SIMULADOS: A. Resultados del Esc.2 Combinación 1x3, B. Resultados del Esc. 2 Combinación 2x3; IV. RESUMEN Y CONCLUSIONES; V. BIBLIOGRAFÍA BÁSICA; VI. ANEXOS.

I.-MODELO DE VALORACIÓN DE UNA ANUALIDAD CIERTA PREPAGADA

Una anualidad cierta representa el valor presente del flujo de los futuros pagos unitarios. Lo anterior viene descrito por:

$$\ddot{a}_n = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \text{ siendo} \quad \begin{array}{c} \text{Diagrama de una anualidad cierta prepagada: una línea horizontal con marcas en } t=0, 1, 2, \dots, n. \text{ Arcos rojos curvados hacia arriba conectan } t=0 \text{ con } t=1, 2, \dots, n. \end{array} \quad (1)$$

$v = (1 + i)^{-1}$ = Factor de descuento de las obligaciones unitarias.

i = Tasa de interés anual.

n = Número de períodos considerados como ciertos a pagar a partir de la edad de jubilación, cualquiera que está sea, Normal o Prematura.

La expectativa de vida a partir de los 60 años (Edad normal de jubilación) viene dada por:

$$\hat{\mu}_T = E(T_{60}) = \sum_{t=1}^{\infty} \text{Prob} \{ x > 60 + t | x > 60 \} \quad (2)$$

T_{60} = tiempo de vida remanente a los 60 años de edad.

$${}_t P_x = {}^1 \text{Prob} \{ x > 60 + t | x > 60 \} = 1 - \frac{\int_x^{x+t} f(u) du}{\int_x^{\infty} f(u) du}$$

probabilidad de supervivencia desde los 60 años hasta: $60 + t; \forall t = 1, 2, 3, \dots, \omega$

La varianza de T_{60} viene dada por²: $\hat{\sigma}_T^2 = \text{Var}(T_{60}) = E(T_{60}^2) - E(T_{60})^2$ (3)

¹ Probabilidad condicional a la edad alcanzada.

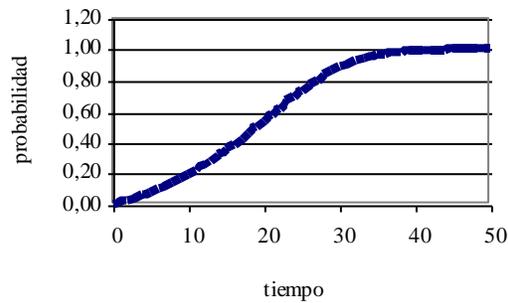
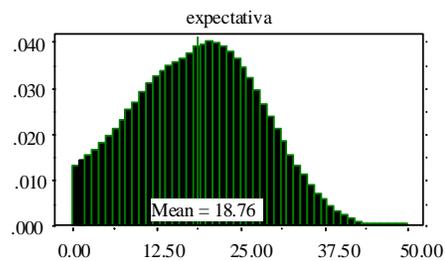
De la tabla de mortalidad se obtiene de manera discreta $\hat{F}(T_{60})$ y $\hat{f}(T_{60})$ ajustando una distribución de probabilidad a los datos. Por supuesto manteniéndose la igualdad $dF(T_{60}) = f(T_{60})dt$.

El ajuste anterior, en el campo continuo, da como resultado lo siguiente:

Tabla 1. Distribución de Probabilidad del Tiempo de Vida

RANGO	RELATIV PROB.	RANGO	RELATIV PROB.
0,00 - 1,00	0,013119	11,00 - 12,00	0,031092
1,00 - 2,00	0,014251	12,00 - 13,00	0,032697
2,00 - 3,00	0,015429	13,00 - 14,00	0,033876
3,00 - 4,00	0,016668	14,00 - 15,00	0,034803
4,00 - 5,00	0,018044	15,00 - 16,00	0,035646
5,00 - 6,00	0,019612	16,00 - 17,00	0,036583
6,00 - 7,00	0,021347	17,00 - 18,00	0,037738
7,00 - 8,00	0,023198	18,00 - 19,00	0,038817
8,00 - 9,00	0,025053	19,00 - 20,00	0,039518
9,00 - 10,00	0,027027	20,00 - 21,00	0,039901
10,00 - 11,00	0,029111	21,00 - 22,00	0,039750
RANGO	RELATIV PROB.	RANGO	RELATIV PROB.
22,00 - 23,00	0,039062	36,00 - 37,00	0,007371
23,00 - 24,00	0,037920	37,00 - 38,00	0,005831
24,00 - 25,00	0,036303	38,00 - 39,00	0,004517
25,00 - 26,00	0,034273	39,00 - 40,00	0,003416
26,00 - 27,00	0,031926	40,00 - 41,00	0,002518
27,00 - 28,00	0,029332	41,00 - 42,00	0,001803
28,00 - 29,00	0,026610	42,00 - 43,00	0,001168
29,00 - 30,00	0,023837	43,00 - 44,00	0,000809
30,00 - 31,00	0,021078	44,00 - 45,00	0,000543
31,00 - 32,00	0,018359	45,00 - 46,00	0,000385
32,00 - 33,00	0,015735	46,00 - 47,00	0,000220
33,00 - 34,00	0,013266	47,00 - 48,00	0,000114
34,00 - 35,00	0,011104	48,00 - 49,00	0,000051
35,00 - 36,00	0,009144	49,00 - 50,00	0,000018
			0,999995

² $\hat{\mu}_T$ y σ_T^2 , calculados a partir de la tabla de mortalidad.

Gráfico 1. Distribución acumulada de T_{60} Gráfico 2. Distribución empírica de la densidad de T_{60} 

Caracterizando, al correr 10.000 simulaciones ³, los siguientes valores para los momentos del tiempo de vida remanente a partir de los 60 años de edad.

$$\hat{E}(T_{60}) = 18,81 \quad (4); \quad \hat{V}(T_{60}) = 85,17 \quad (5); \quad \hat{CV} = \sqrt{\hat{V}(T_{60})} / \hat{E}(T_{60}) \quad (6)$$

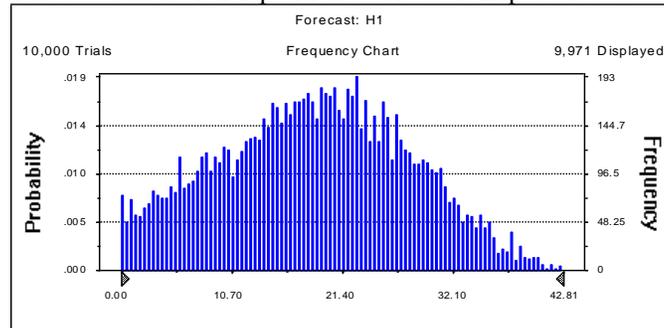
con un coeficiente de variación de 49% y un error estándar del 9%.

Tabla 2. Resumen de las Estadísticas Descriptivas de la Simulación de las Expectativas de Vida

STATISTICS:	VALUE	STATISTICS:	VALUE
Trials	10000	Kurtosis	2,42
Mean	18,81	Coeff. of Variability	0,49
Median	18,97	Range Minimum	0,00
Mode	---	Range Maximum	49,44
Standard Deviation	9,23	Range Width	49,44
Variance	85,17	Mean Std. Error	0,09
Skewness	0,05		

³ Con el objeto de conocer la estabilidad del valor promedio y de la varianza determinada por el ajuste.

Gráfico 3. Simulación Tipo Montecarlo de la Expectativa de Vida



II.- SUPUESTOS DEL MODELO

Se evaluaron a la edad normal de jubilación (e= 60 años), los siguientes escenarios.

ESCENARIOS	OBSERVACIONES
<p>ESC. 1</p> <p>Certeza en ambos parámetros i y T_{60}</p> $\ddot{a}_n = \frac{1 - v^{E(T_{60})}}{(1 - v)}$	<p>Se evalúa la anualidad asumiendo que con probabilidad 1 el interés permanece constante en $i = 12\%$ y la expectativa de vida en 18,81 años a partir de los 60 años de edad.</p>
<p>ESC. 2</p> <p>Se evalúa la incertidumbre en los parámetros. En este escenario se combinan las siguientes alternativas:</p> <p style="text-align: center;">1 con 3 2 con 3</p> $\ddot{a}_n = \frac{1 - v^{E(T_{60})}}{(1 - v)}$	<p>Se asumen dos alternativas:</p> <p>1) $i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $E(i) = \mu_1 = 12\%$ $Var(i) = \sigma_1^2 = 1\%$</p> <p>2) $i \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ $E(i) = \mu_2 = 12\%$ $Var(i) = \sigma_2^2 = 5\%$</p> <p>3) $T_{60} \sim$ Distribución empírica ajustada $\hat{E}(T_{60}) = 18,81$ $\hat{Var}(T_{60}) = 85,17$ $\hat{f}(T_{60}), \hat{F}(T_{60})$</p>

III.- ANÁLISIS DE RESULTADOS SIMULADOS

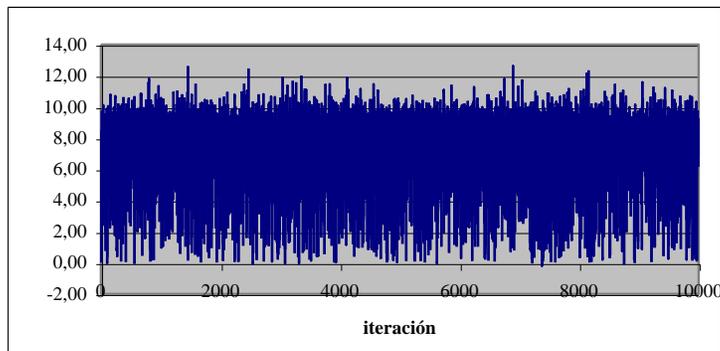
Al correr 10.000 iteraciones se obtienen los siguientes resultados, para el valor de la anualidad.

A.- Resultados del Esc. 2 Combinación 1 x 3

Tabla 3. Resumen de las Estadísticas Descriptivas de la Simulación de la Anualidad

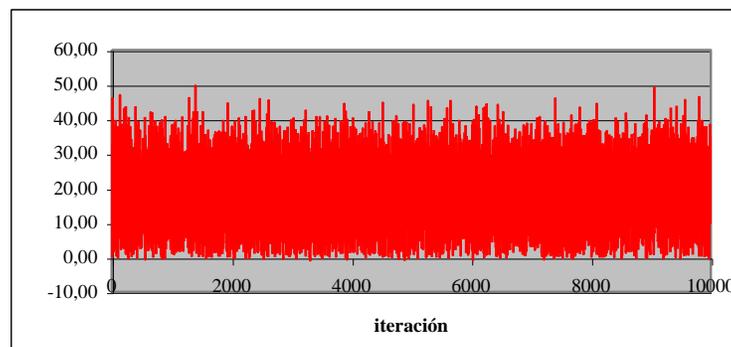
STATISTICS:	VALUE	STATISTICS:	VALUE
Trials	10000	Skewness	-1,46
Mean	7,52	Kurtosis	5,17
Median	8,07	Coeff. of Variability	0,27
Mode	---	Range Minimum	0,00
Standard Deviation	2,03	Range Maximum	12,61
Variance	4,13	Range Width	12,61

Gráfico 4. Valor de la Anualidad (Iteraciones)



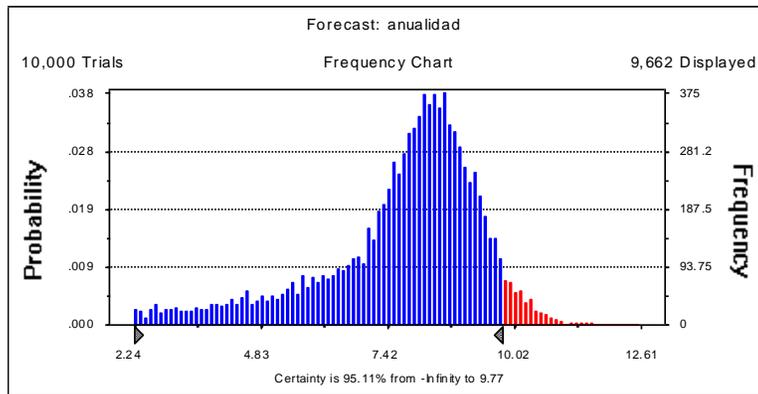
Con ligeras excepciones se observa que la mayor densidad de los casos iterados en sus valores máximos no superan la cota superior de los Bs. 12 de prima.

Gráfico 5. Valor de la Expectativa de Vida (Iteraciones)



De este gráfico, en forma visual, se observa claramente a este nivel de resolución, una densidad muy alta de expectativas de vida, iguales o inferiores a 30 años a partir de los 60 años. Tomar expectativas inferiores a estas, puede traer como consecuencia insuficiencias de prima para afrontar el riesgo. Pues como veremos más adelante, en el caso de un alta volatilidad del interés, valorar una anualidad en la expectativa de vida puede ser una estimación bastante razonable del precio de la anualidad para minimizar el riesgo.

Gráfico 6. Valor en Bolívares (Bs.) de la Anualidad



Al 95,11% de certeza se observa que el valor de la anualidad promedio es 7,52 Bs.⁴ con un coeficiente de variabilidad del 27%, lo cual nos indica que existe una probabilidad remanente de un 70% de que el valor de la anualidad supere la media o valor promedio. Esto habla por sí sólo del riesgo que se estaría corriendo de calcular una prima pura, en el caso por ejemplo de un auto-seguro, aplicando el criterio del valor esperado reclamable, y tarifando la prima pura en 7,52 Bs., pues de acuerdo con la simulación de cada 100 casos simulados el 70% originaría una prima > 7,52 Bs.

De este **Escenario 2 Combinación 1 x 3**, se observa que la expectativa de vida tiene un mayor impacto que la tasa de interés cuando se sensibilizan los valores originales por arriba y por debajo del **caso base**, tal como se muestran en las siguientes tablas y gráficos.

Tabla 4. Análisis de Sensibilidad

Variable	Anualidad			Input		
	Downside	Upside	Range	Downside	Upside	Base Case
expectativa	4,68	9,05	4,37	6,13	30,83	18,89
interes	8,95	7,63	1,32	10%	14%	12%

⁴ Coincidente con el 30% percentil de la distribución del valor de la anualidad bajo el Escenario 2 Combinación 1 x 3.

Gráfico 7. Análisis de Sensibilidad

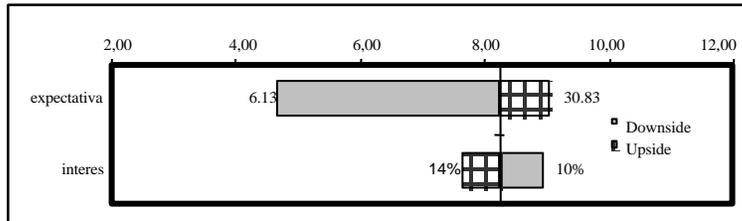
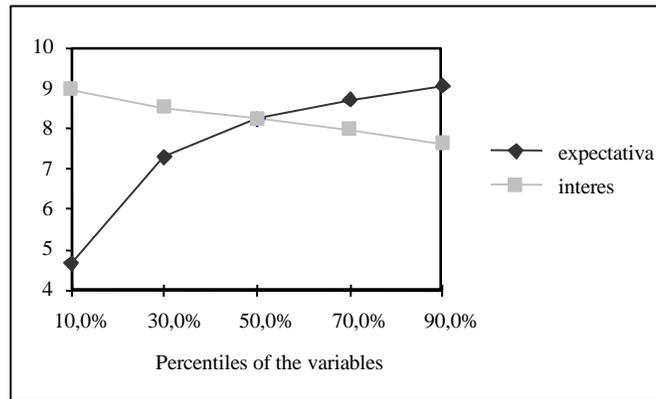


Tabla 5. Análisis del Percentilado

Variable	anualidad				
	10,0%	30,0%	50,0%	70,0%	90,0%
expectativa	4,676452651	7,287806566	8,236577285	8,717944456	9,049707593
interes	8,947196346	8,514282464	8,236577285	7,975412045	7,625032056

Gráfico 8 ⁵. Análisis del Percentilado



B.- Resultados del Esc. 2 Combinación 2 x 3

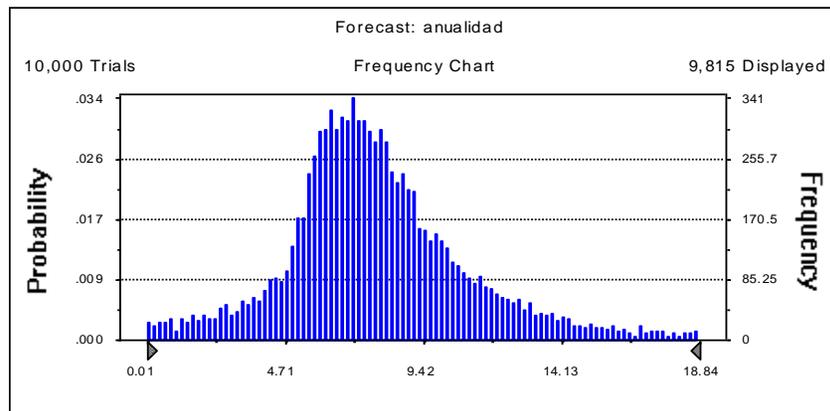
⁵ Importante destacar el análisis derivado del gráfico 8, donde se observan comportamientos en sentidos opuestos. El interés decae cuasi – linealmente y la expectativa sube de manera no lineal compensando la caída del interés con el aumento del percentil.

En el Escenario 2 combinación 2 x 3, cuando se aumenta la varianza o nivel de volatilidad de la tasa de interés a 5%, el valor medio de la anualidad sube a 8,18 Bs., con un coeficiente de variación del 50%, tal como se muestra en los siguientes gráficos y tablas:

Tabla 6. Resumen de las Estadísticas de Simulación

STATISTICS:	VALUE	STATISTICS:	VALUE	STATISTICS:	VALUE
		Range			
Trials	10000	Variance	16,81	Minimum	0,01
				Range	
Mean	8,18	Skewness	3,47	Maximum	81,77
Median	7,55	Kurtosis	36,64	Range Width	81,76
		Coeff. of		Mean Std.	
Mode	---	Variability	0,50	Error	0,04
Standard					
Deviation	4,10				

Gráfico 9. Valor en Bolívares (Bs.) de la Anualidad



Obviamente el coeficiente de variabilidad muestra claramente el efecto de una **mayor variación o volatilidad en la tasa de interés**. Igualmente se observa un aumento del precio de la anualidad pasando de 7,52 a 8,18 lo cual representa un incremento de 8,77%.

IV.- RESUMEN Y CONCLUSIONES

ESCENARIO	VALOR ANUALIDAD ⁶	Δ ⁷	% ⁸
I. CERTEZA	8,23	-	-
II. INCERTIDUMBRE			
1 x 3	7,52	0,71	8,62
2 x 3	8,18	0,05	0,60

Si definimos el riesgo como la probabilidad de superar el valor que se asume como cierto en el Escenario 1, las probabilidades de las pérdidas derivadas serían como sigue, para cada una de las alternativas:

$$P_1(V_a > V_c) = P_1(V_a > 8,23) = 1 - P_1(V_a > 8,23) \cong 1 - 56\% \cong 44\% \quad (7)$$

$$P_2(V_a > V_c) = P_2(V_a > 8,23) = 1 - P_2(V_a > 8,23) \cong 1 - 61,5\% \cong 38,5\% \quad (8)$$

V_a : Valor de la variable aleatoria anualidad definida en los términos antes descritos, para cada una de las dos combinaciones.

V_c : Valor de la anualidad en el caso de asumir el escenario de certeza.

$P_1(\cdot)$: Probabilidad bajo la combinación 1 x 3 de superar V_c .

$P_2(\cdot)$: Probabilidad bajo la combinación 2 x 3 de superar V_c .

Las principales conclusiones que se derivan de este análisis son:

1. Cuando se evalúa una **anualidad cierta a una tasa de interés fija** y por un **período también fijo** equivalente a la esperanza matemática del tiempo de vida remanente condicionado a una edad normal de jubilación, generalmente se tiende a sobreestimar la prima única o precio de la anualidad. Dichos montos varían respectivamente en Bs. 0,71 y Bs. 0,05, por debajo del valor asumido como cierto de Bs. 8,23.

2. **Cuando aumenta la volatilidad de la tasa de interés** se observa un aumento en el riesgo, expresado por el aumento del coeficiente de variabilidad del valor de la anualidad, de 27% a 50%, lo cual representa un crecimiento de un 85,18%. Igualmente se produce un movimiento drástico de la distribución de probabilidad empírica cambiando fuertemente el signo de su sesgo al pasar de -1,46 a 3,47. Por otro lado, la curtosis o grado de picudez de la distribución aumenta severamente su valor, pasando de 5,17 a 36,64, lo cual representa un crecimiento de casi 8 veces.

⁶ Valores esperados o promedios.

⁷ Diferencial en bolívares (Bs.) respecto del escenario bajo certeza.

⁸ Diferencial porcentual respecto del escenario bajo certeza

Obviamente la distribución asociada al Escenario 2 Combinación 1 x 3, presenta colas de distribución más gruesas, que permiten claramente visualizar los niveles de riesgo involucrados para los valores extremos de la anualidad.

3. **Condicionando a la edad normal** de jubilación, parecen tener más impacto los cambios en la expectativa de vida que la volatilidad del interés para los rangos estudiados. Esto es fácilmente explicable por el tamaño de la varianza del tiempo remanente de vida registrado en la tabla de mortalidad.

4. Cuando se sospecha de alta variabilidad en la expectativa de vida como en la volatilidad del interés, valorar la renta en su expectativa, como si se tratase de una anualidad cierta, pudiera ser una alternativa razonable para valorar rentas con un margen positivo.

V.-BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

- BREMAUD, Pierre. “Markov Chain Gibbsfields, Montecarlo Simulation”. Editorial Springer, 1998.
- EVANS, Hastings and Peacock. “Statistical Distributions”. Editorial John Wiley and Sons Inc, 2000.
- FERAUD, Lucien. “Mathematiques et theories actuarielles. Editorial Gauthier-Villars, 1989.
- SIROVICH. “Introduction to Applied Mathematics”. Editorial Springer, 1998.

VI.- ANEXOS

Anexo 1. Percentilado del Valor de la Anualidad. Escenario 2 Combinación 1 x 3

<u>Percentile</u>	<u>Value</u>	<u>Percentile</u>	<u>Value</u>	<u>Percentile</u>	<u>Value</u>	<u>Percentile</u>	<u>Value</u>
0%	0,00	30%	7,26	55%	8,22	80%	8,97
5%	2,96	35%	7,52	60%	8,36	85%	9,18
10%	4,59	40%	7,72	65%	8,50	90%	9,41
15%	5,65	45%	7,90	70%	8,64	95%	9,77
20%	6,36	50%	8,07	75%	8,79	100%	12,61
25%	6,88						

Anexo 2. Percentilado del Valor del tiempo de vida remanente

<u>Percentile</u>	<u>Value</u>	<u>Percentile</u>	<u>Value</u>	<u>Percentile</u>	<u>Value</u>	<u>Percentile</u>	<u>Value</u>
0%	0,00	30%	13,67	55%	20,20	80%	26,99
5%	3,37	35%	15,07	60%	21,45	85%	28,82
10%	5,94	40%	16,42	65%	22,71	90%	30,86
15%	8,20	45%	17,70	70%	24,01	95%	33,90
20%	10,14	50%	18,97	75%	25,49	100%	49,44
25%	12,04						

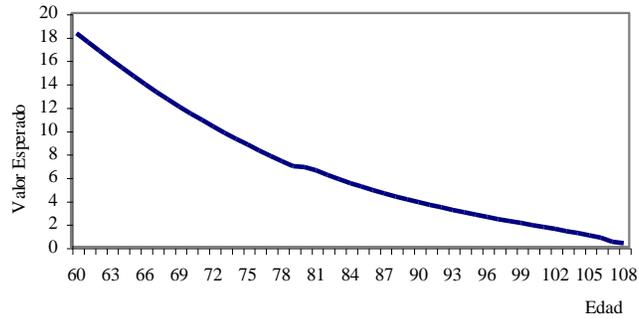
Anexo 3. Percentilado del Valor de la Anualidad. Escenario 2 Combinación 2 x 3

<u>Percentile</u>	<u>Value</u>	<u>Percentile</u>	<u>Value</u>	<u>Percentile</u>	<u>Value</u>	<u>Percentile</u>	<u>Value</u>
0%	0,01	30%	6,36	55%	7,88	80%	10,20
5%	3,02	35%	6,67	60%	8,21	85%	11,08
10%	4,49	40%	6,96	65%	8,60	90%	12,33
15%	5,28	45%	7,25	70%	9,01	95%	14,67
20%	5,71	50%	7,55	75%	9,53	100%	81,77
25%	6,05						

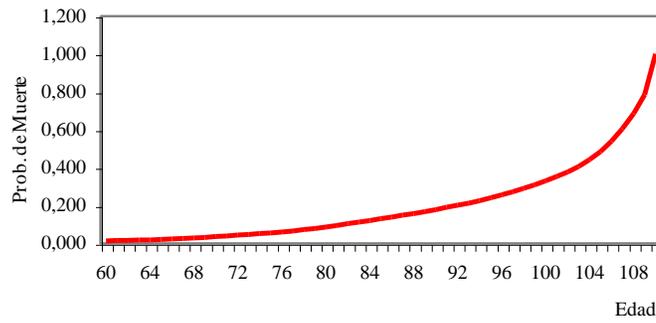
Anexo 4. Tabla de Mortalidad Group Annuity Mortality 1971. Hombres (60 – 110)

<u>x</u>	<u>qx</u>	<u>E(T)</u>	<u>V(T)</u>	<u>x</u>	<u>qx</u>	<u>E(T)</u>	<u>V(T)</u>
60	0,013119	18,259251	84,964355	94	0,226535	2,9609	7,237426
61	0,01444	17,501978	81,431254	95	0,241164	2,761031	6,479343
62	0,015863	16,75841	78,070535	96	0,256204	2,569946	5,771486
63	0,017413	16,028533	74,729121	97	0,27248	2,384879	5,111412
64	0,019185	15,312584	71,419833	98	0,290163	2,205776	4,494347
65	0,02126	14,612102	68,140715	99	0,309125	2,032272	3,915995
66	0,023643	13,929504	64,882212	100	0,329825	1,862752	3,372091
67	0,026316	13,266814	61,641025	101	0,352455	1,695629	2,858893
68	0,029188	12,625379	58,421422	102	0,37722	1,52727	2,376685
69	0,032435	12,004968	55,241351	103	0,406205	1,352318	1,928218
70	0,036106	11,407403	52,100006	104	0,441497	1,168398	1,5161
71	0,040008	10,834706	48,994577	105	0,485182	0,975041	1,141125
72	0,043827	10,286247	45,940249	106	0,539343	0,771936	0,801467
73	0,047489	9,757725	42,97392	107	0,606069	0,443506	0,38086
74	0,051221	9,244213	40,132774	108	0,687444	0,312556	0,214865
75	0,055293	8,743273	37,436912	109	0,785555		
76	0,060068	8,25501	34,891933	110	0,999999		
77	0,065924	7,782561	32,488515				
78	0,072595	7,331829	30,205044				
79	0,079692	6,905746	28,032174				
80	0,087431	6,81573	23,383835				
81	0,095445	6,530069	22,966393				
82	0,103691	6,150033	21,338865				
83	0,112303	5,794067	19,779215				
84	0,121116	5,46103	18,288865				
85	0,130102	5,14867	16,870747				
86	0,139315	4,854661	15,526298				
87	0,148714	4,576972	14,255896				
88	0,158486	4,313435	13,058872				
89	0,168709	4,062965	11,93168				
90	0,179452	3,824867	10,869067				
91	0,190489	3,598433	9,866666				
92	0,201681	3,381289	8,924562				
93	0,212986	3,169623	8,049035				

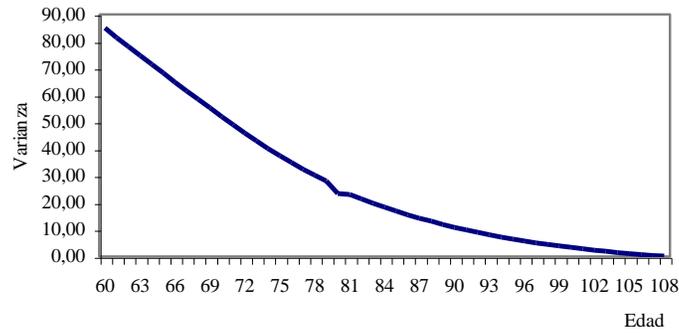
Anexo 5. Distribución de la Probabilidad de Muerte



Anexo 6. Valor Esperado



Anexo 7. Varianza



Anexo 8. $S_{60}(t)$

