LÓGOI Revista de Filosofía N° 16. Semestre julio-diciembre 2009

pp. 139-146

Discusión

Johnder Báez
Universidad Católica Andrés Bello
jbaez@ucab.edu.ve

Consecuencia lógica y lenguajes de orden superior

Resumen:
En este trabajo se muestra la relación entre la consecuencia lógica y los lenguajes de orden superior. Esta peculiar perspectiva tiene dos objetivos: primero, mostrar cómo podemos enseñar lógica de orden superior; segundo, ofrecer algunos materiales básicos que podemos utilizar para alcanzar nuestro objetivo satisfactoriamente. Con este propósito introduciremos las obras "A Second Course in Logic" de Gauker, y *Lógica para principiantes* de Manzano-Huertas.

Palabras clave: Lógica de orden superior, metalógica, semántica formal.

Logical Consequence and Higher-order Languages

Abstract:
This work shows the relationship between logical consequence and higher-order languages. This peculiar perpective has two objetives: first, to show how we can teach higher-order logic, and second, to offer some basic materials that can be used to achieve our goal satisfactorily. In order to do this we will introduce "A Second Course in Logic" by Gauker and *Lógica para principantes* by Huertas and Manzano.

Key words: Higher-order Logic, metalogic, formal semantics

Recibido: 23-05-2008 / Aprobado: 19-08-2008

§1

En el marco del primer *Taller de Didáctica de la Lógica* (2007), presentamos someramente algunas consideraciones en relación con el concepto de consecuencia lógica desde una peculiar perspectiva, a saber: cuál es el compromiso que debemos asumir al enseñar el concepto de consecuencia presentado por las profesoras Manzano y Huertas en su libro de texto *Lógica para principiantes*[1]. En efecto, para ellas, uno de los objetivos fundamentales de la lógica es estudiar el concepto de consecuencia[2]; o lo que es equivalente, el estudio de lo razonamientos válidos o correctos[3]. En otras palabras, la consecuencia no es más que una relación que se establece entre un conjunto de fórmulas que se toman como *premisas o hipótesis* y otra a la que se denomina conclusión, en virtud de la cual toda interpretación que satisface las hipótesis, satisface la conclusión[4].

A su vez, procuramos mostrar algunas razones por las cuales podemos emplear este texto como un instrumento innovador, eficaz e imprescindible para la enseñanza de la lógica clásica con lo cual nos comprometimos, particularmente, con una semántica extensional, bivalente, veritativo-funcional, con ciertos supuestos de existencia[5] como también, porqué no decirlo, con las propiedades[6] que son invariantes[7] respecto a determinadas transformaciones[8]

1 M. Manzano & A. Huertas: *Lógica para principiantes*, Madrid, Alianza, 2004.

2 "Es natural que en la lógica clásica las consecuencias lógicas estén cerradas bajo la relación de inferencia. Por ejemplo, Tarski pide que las consecuencias lógicas de las consecuencias lógicas no añadan nada, es decir, Cn (Cn) = Cn(A)." Raymundo Morado: "Problemas filosóficos de la lógica no monotónica", *Filosofía de la lógica, 27.* EIAF, Madrid, Trotta, 2004 p. 318; Christopher Gauker: "A Second Course in Logic", pp. 6-27, consultado en línea: http://asweb.artsci.uc.edu/philosophy/gauker/, el 25/07/2007; Barwese-Etchemendy: *Language, Proof and Logic*, 1999, p. 28-31; Quine: *Lógica matemática*, Madrid, Alianza, 1972, p. 277-309.

3 Manzano, M. & Huertas, A., *Op.cit.*, p. 3.

4 *Ibid.*, p. 398. Se define una lógica donde se introduce un lenguaje artificial, con alfabeto y reglas gramaticales de formación de fórmulas y se atribuye significado a las expresiones del lenguaje mediante interpretaciones semánticas. *Ibid.*, p. 393-409. Gauker, *Op.cit.*, l.c.

5 Cf. Raymundo Morado & Ariel Campirán: "Sobre la enseñanza de las lógicas no-clásicas", pp. 7-36, *Ergo*, nº 17, Nueva Época, 2005.

6 Las metapropiedades de monotonía, reflexividad y corte. La comparación entre lógicas requiere una cierta caracterización de las mismas y un posicionamiento respecto de la siguiente cuestión: ¿Es la lógica clásica un sistema lógico universal, adecuado para ser utilizado en todas las áreas en las que se aplica la lógica? Cf. M. Manzano: "Divergencia y rivalidad en lógica", *Filosofía de la lógica*, 27, EIAF. Madrid: Trotta, 2004, p. 77.

7 Los conceptos son lógicos si podemos realizar trasformaciones pertinentes en el universo para demostrar la invariancia del concepto bajo cierto grupo de transformaciones (a partir de su propia definición semántica de consecuencia). Cf. Nikolic: "La invariancia como criterio de significatividad en los lenguajes formales", pp. 33-51, 2004.

8 "De manera que un concepto es lógico si podemos definir trasformaciones pertinentes en el universo que idealmente representa al de conjuntos del que extraemos las estructuras y demostrar la invariancia del concepto bajo las trasformaciones. La jerarquía de tipos

que interpretan o están asociadas a regularidades de ciertas parcelas del mundo[9]. Finalmente, mostramos nuestra visión en relación con la existencia de distintos sistemas lógicos[10] que restringimos, en el marco de la presentación Manzano y Huertas en *Lógica para principiantes*, a la lógica proposicional y de primer orden.

Ahora bien, si logramos que nuestros alumnos se sientan motivados a participar en un nuevo curso de lógica clásica, después de haber trabajado arduamente el texto de Manzano y Huertas, quizás sea el momento de plasmar nuestra visión particular en la enseñanza de la lógica clásica. En efecto, sin ser maestros y sin pretender realizar una reflexión sistemática de filosofía de la lógica, podemos esbozar nuestra perspectiva en el marco de dos preguntas relevantes, a saber: a) cómo podemos enseñar lógica de orden superior y b) qué materiales podemos utilizar para alcanzar nuestro objetivo satisfactoriamente.

Este trabajo se centra en las preguntas precedentes. En consecuencia, a este tenor declaramos de entrada que nuestra exposición se enfocará nuevamente en *Lógica para principiantes* sin que ello sea óbice, en definitiva, para tener en consideración los apuntes del profesor Cristopher Gauker[11], que nos permitan proyectar un sentido que nos oriente hacia nuestro objetivo que no es otro que presentar, desde nuestra peculiar visión, cómo podemos enseñar lógica de orden superior[12] en un segundo curso universitario y qué materiales podemos utilizar para lograr nues-

finitos es la idealización del universo más frecuentemente empleada y las transformaciones son las permutaciones, biyecciones, isomorfisos, etc., según los distintos autores [Mc Gee, Sher, Mostowki, etc]... Tarski analiza las nociones lógicas de los Principia Mathematicae y muestra que son invariantes bajo permutaciones del universo de individuos de la jerarquía; concretamente, ningún individuo lo es, el vacío y la clase universal sí lo son y también las relaciones binarias de vacío, universal, identidad, y su complementaria, por citar tan sólo las clases de los primeros niveles de la jerarquía de tipos". M. Manzano: "¿Qué es esa cosa llamada lógica?", pp. 5-6, 2005. Consultado en línea el día 18/04/2007 por: http://logicae.usal.es/mara/

9 *Ibid.*, p. 5.

10 Cf. Raymundo Morado & Ariel Campirán, *Op. cit.*, l.c.

11 Nos dice Gauker que su trabajo es "...a free book, 148 pages (sic). It is for anyone who has had a solid introductory logic course and wants more. Topics covered include soundness and completeness for first-order logic, Tarski's theorem on the undefinability of truth, Gödel's incompleteness theorems, the undecidability of first-order logic, a smattering of second-order logic, and modal logic (both propositional and quantificational). I wrote it for use in my own course, because I thought I could present the most important results and concepts more clearly than the available textbooks". Christopher Gauker. Department of Philosophy. University of Cincinnati. P.O. Box 210374 Cincinnati, OH 45221-0374. e-mail: christopher.gauker@uc.edu.

12 Cf. Raymundo Morado: "¿Qué es lo que debe saber una persona educada en lógica?", en Raymundo Morado (Comp.): *La Razón Comunicada. Materiales del Taller de Didáctica de la Lógica*. Xalapa, Veracruz, Universidad Veracruzana, Universidad de Xalapa, Torres Asociados, TDL, 1999.

tro objetivo. Ahora bien, como entendemos por lógica, sin realizar una definición comprensiva del término, la razón coherente para proceder[13], la razón consistente para diseñar un proceso filosófico y la razón pertinente para alcanzar la solución a los problemas científicos[14], necesitamos restringir nuestro discurso únicamente a la lógica de segundo orden[15] por razones de simplicidad y elegancia. Como sabemos, en cierto modo, los lenguajes de orden mayor a dos pueden reducirse a los de segundo orden, y esto nos permite delimitar nuestro discurso únicamente a la lógica de segundo orden[16]. Asimismo creemos que este protocolo nos exime tanto de presentar un análisis exhaustivo del lenguaje, la semántica formal y el cálculo deductivo de la lógica de segundo orden, como hacer explícitas las críticas de los filósofos de la lógica que arguyen que la lógica de segundo orden es una teoría de conjuntos[17] en disfraz[18]. Esto nos lleva afirmar que nos limitaremos exclusivamente a los aspectos didácticos y pedagógicos

13 "Hoy en día, la noción de racionalidad involucra computar bien, calcular o procesar eficientemente la información disponible... Por ello], la persona lógicamente racional ya no sólo será <<la que argumenta bien>>, ni <<quien habla y comprende bien>>, ni <<aquella que domina el álgebra del pensamiento>>, sino aquella que <<procesa bien la información, dado su contexto>>". Morado, Raymundo, *Op. cit*, "Problemas filosóficos de la lógica...", p. 317.

14 En muchos casos se toma a la matemática como paradigma de racionalidad lógica. "Ya no se considera que la disciplina filosófica más cercana a la lógica es la ontología, como en Parménides, ni la retórica, como en Aristóteles, ni la filosofía del lenguaje, como en Ockham, sino la filosofía de las matemáticas, como en Frege y Russell". *Ibid.*, 315.

15 Uno de los aspectos distintivos de la lógica de segundo orden es su capacidad expresiva, pues hay muchos conceptos importantes que no son expresables en sentencias de primer orden pero sí de segundo orden. Por ejemplo, el concepto de infinitud, la relación de identidad, etc. Cf. Jané: "Lógica de orden superior", pp. 109-115, *Lógica*, 5, EIAF, Madrid, Trotta, 1995; Hamilton: *Lógica para matemáticos*, 1981, pp. 116-139.

16 Doets Van Benthem: "Higher-order Logic", en Gabbay-Guenthner, pp. 323-4, 1983, cit Jané, *Op. cit.*, p. 126; Gauker, *Op. cit.*, pp. 133-141.

17 "En la teoría axiomática de Zermelo Fraenkel se respeta la idea fundamental de aceptar que una colección de objetos pueda ser un conjunto, pero se impone la condición de que todos los objetos de la colección deben haberse formado antes de definir dicha colección, y de esta manera se evitará los problemas que conducen a las paradojas. Uno de los axiomas de la teoría impondrá esta restricción: "Si X es un conjunto ya construido existe un conjunto Y formado por los elementos de X que satisfacen un predicado P que los describe. Así un predicado describirá un conjunto sólo si los objetos han sido ya construidos (son un conjunto X) y además satisfacen el predicado". M. Manzano: *Teoría de conjuntos*, p. 8, 2002. Consultado en línea el día 03/05/2007, en: http://logicae.usal.es/mara/

18 "¿Pertenece la teoría de conjuntos a la lógica? Mi tesis es que no (...) los primeros exploradores de la lógica moderna entendieron que la teoría de conjuntos era lógica pura: tal es el caso de Frege, Peano, y de varios continuadores suyos, principalmente Whitehead y Russell. Frege Whitehead y Russell se absorvieron en la tarea de reducir la matemática a la lógica; en 1884 Frege declaró que por esa vía se había demostrado, refutando a Kant, que las verdades de la aritmética son analíticas. Pero, la lógica capaz de albergar esa reducción de la matemática era una lógica que incluía la teoría de conjuntos...Yo, por mi parte, lamento el uso de las letras predicativas como variables cuantificables, aun en el caso de que sus valores sean conjuntos. Los predicados tiene la intensión o significación atributos (o los tendrían, si los hubiera), y tienen como extensiones conjuntos; pero no son nombres ni de atributos ni de atributos ni de conjuntos. Por lo tanto, las variables que se pueden tomar para la cuantificación no deben presentar en posición de predicados. Les corresponden las posiciones de nombre propio". Quine: *Filosofía de la lógica*, 1973, pp. 116-120.

de la lógica de segundo orden que queremos resaltar y, al mismo tiempo, procurar prudentemente dejar de lado el lenguaje altamente expresivo de Frege y Russell ya que la lógica de segundo orden se distingue de la de primer orden en que posee variables[19] relacionales además de las individuales y todas pueden cuantificarse[20]. Con ello espero respetar, finalmente, los límites de lo que se puede decir coherentemente en relación con la lógica de orden superior.[21]

§2

Para presentar en un marco pedagógico la enseñanza de la lógica de orden superior, mostraremos, por ejemplo, el temario de la asignatura publicado en la memoria del programa oficial del posgrado interuniversitario en Lógica y Filosofía de la Ciencia (PLFC), en el que participan las universidades de Salamanca, Autónoma de Madrid, La Laguna, Santiago de Compostela, A Coruña y Valladolid[22]. El temario es el siguiente: 1.- Lenguaje y semántica de la lógica de orden superior; 2.- Capacidad expresiva: (a) axiomática de Peano para los números naturales, (b) axiomas de teoría de conjuntos; 3.- Propiedades metalógicas: a) Incompletud, b) Incompacidad. 4.- Semántica no estándar: modelos generales; 5.- Paradojas y su solución en teoría de tipos; 6.- Teoría simple de tipos de Church; 7.- Identidad; 8.- Lógica de orden superior en programación y en computación.

Ahora bien, al margen de la densidad teórica, que no es poca, con un nivel de posgrado, el temario presenta una estructura estándar en tanto parte de un lenguaje de orden superior para después construir un puente con la semántica de la lógica de segundo orden por intermedio de la teoría axiomática de la teoría de conjuntos, con lo cual se puede mostrar las correspondientes propiedades metalógicas de la lógica de segundo orden para que, finalmente, extienda su análisis a la teoría de tipos y aplicaciones

19 M. Manzano & A. Huertas, *Op. cit.*

20 *Ibid.*

21 Actualmente recibe reconocimiento por su utilidad en aplicaciones y por su importancia en la informática teórica. "Lógicas de Orden Superior". Programa. epimenides.usal.es/cursos.html. "Master en Lógica y Filosofía de la Ciencia", Departamento de Filosofía y Lógica y Filosofía de la Ciencia de la Facultad de Filosofía de la USAL.

22 Cit. epimenides.usal.es/. Según la memoria del programa el posgrado tiene por objetivo dotar a sus titulados de un conocimiento de alto nivel en los ámbitos de la argumentación, de la Lógica en sus diversas aplicaciones a la tecnología de la información, (problemas formales de desarrollo de nuevas tecnologías...), de la Ciencia y sus conflictos sociales y del estudio de la relación entre lenguaje y mundo. *Ibid.*

a las tecnologías de la información. Evidentemente, esta presentación *presupone* la lógica de primer orden. Ahora bien, podríamos preguntarnos, ¿puede enseñarse lógica de segundo orden con otro criterio? ¿Existen materiales adecuados para ello?

Quizás sea el momento de presentar algunas consideraciones que nos ayuden a responder estas preguntas. En efecto, la lógica de segundo orden cuantifica sobre subconjuntos del universo del discurso. Es decir, la lógica de segundo orden, además de contener las variables individuales, contiene variables de predicado[23]. Pero esta diferencia marcada se ve mejor en el marco semántico, i.e, cuando intentamos evaluar una sentencia en una estructura. Nos dice Jané que

> (...) si α es una sentencia de primer orden, la verdad o falsedad de α en una estructura **A** depende únicamente de α y de lo que está explícitamente dado al dar **A**, a saber: su universo, A, y la función de interpretación, $\mathfrak{I}$, de los símbolos del lenguaje...sin embargo, para determinar si una sentencia de segundo orden es verdadera en una estructura **A** debemos salir fuera de **A**; nos hace falta recurrir a la totalidad de subconjuntos de A y a la relación de cualquier número de argumentos entre elementos de A... [por tanto] para evaluar correctamente las fórmulas de segundo orden es esencial que consideremos todos los subconjuntos y todas esas relaciones. [Ahora bien]... Entendemos qué es un subconjunto de un conjunto y qué una relación entre elementos del conjunto. Pero esto no significa que seamos capaces de precisar qué subconjuntos tienen un conjunto dado y qué relaciones se dan entre sus elementos. Esto es tema principal de la teoría de conjuntos. De ahí que para resolver problemas en lógica de segundo orden debamos recurrir una y otra vez a las enseñanzas de la teoría de conjuntos [24]

Con ello podemos considerar a la lógica de segundo orden como una teoría[25] de conjunto disfrazada de lógica. Ahora bien, si bien es cierto lo anterior, podemos retomar nuestra discusión en otro nivel. Al no querer entrar en los procelosos mares de la teoría de conjuntos ni enseñar lógica de segundo orden con una estructura estándar libre de presupuestos ontológicos, como podría enseñarse, por ejemplo, lógica modal[26] sin haber enseñado lógica proposicional, nos permitimos esbozar nuestra propuesta: realizar un análisis exhaustivo del concepto de consecuencia lógica como concepto fundamental de la lógica e intentar caracterizar las di-

23 Jañé: "Lógica de orden superior", *Lógica*, 5, EIAF, Madrid, Trotta p. 106, 1995.

24 *Ibid.*, 126-127. Suppes: *Teoría axiomática de conjuntos*, 1968, p. 11-79; Quine, *Op. cit.*, *Lógica matemática*, p. 163-200.

25 Manzano, M. & Huertas, A., *Op. cit.*

26 Chellas: *Modal Logic*, 1980, pp. 3-206; Gauker, *Op. cit.*, pp. 142-160.

ferencias fundamentales de LPO y LSO.[27] Para ello no deberíamos salir de *Lógica para principiantes*. En efecto, para enseñar lógica de segundo orden debemos partir de la lógica de primer orden (*sin presuponerla*) y demostrar que la relación de consecuencia lógica es finita en LOP (es compacta), y no lo es en la lógica de segundo orden. Nos dice Jané que "la relación de consecuencia de un lenguaje es de carácter finito si y sólo si la lógica de este lenguaje es compacta. Que la lógica de un lenguaje sea compacta significa que siempre que todo subconjunto finito de un conjunto[28] de sentencias de este lenguaje tenga un modelo, el conjunto infinito también lo tendrá"[29]. Con lo cual podremos demostrar la equivalencia de la compacidad de una lógica (*si todo subconjunto finito de un conjunto de enunciados es satisfacible, entonces ese conjunto es, todo él, satisfacible*)[30] y el carácter finito de la relación de consecuencia en LPO[31]. Esto se logra, al fin y al cabo, porque el teorema de compacidad es de naturaleza puramente semántica y puede ser resuelto sin apelar a la noción de deducibilidad: combinando los modelos de los conjuntos finitos para construir el del conjunto infinito[32].

Pero para enseñar y demostrar esta propiedad, debemos estudiar la metateoría de la lógica de primer orden con rigor y precisión. Por tanto, afirmamos que podemos enseñar LSO desde la metateoría de primer orden a partir de los materiales presentados en *Lógica para principiantes* por Manzano y Huertas que complementaremos con los apuntes de clases del profesor Gauker. Lo relevante de esta propuesta, desde el punto de vista pedagógico y didáctico, es que podemos estudiar los textos en versión PDF y, al disponer de la plataforma gratuita de estos materiales en Internet, estimulamos el proceso de aprendizaje tan importante en la enseñanza de la lógica.

El contenido temático del curso podría ser el siguiente: 1.- Validez[33] en LPO (definir estructura, interpretación y verdad en una

27 Abreviación de lógica de primer orden (LPO) y de lógica de segundo orden (LSO).

28 Manzano, M. & Huertas, A., *Op. cit.*

29 Jané, *Op. cit.*, p.114.

30 M. Manzano, *Op. cit.*, "¿Qué es esa cosa llamada lógica?", p. 9.

31 Jané, *Op. cit.*, l.c. Mosterín (1976): *Lógica de primer orden*, pp. 107-138.

32 Manzano: *Teoría de modelos*, 1989, p. 20.

33 Manzano, M. & Huertas, A., *Op. cit.*

estructura)[34]; 2.- Corrección[35] de LPO; 3.- Completud[36] de la lógica proposicional; 4.- Completud[37] de LPO; 5.- Lógica de segundo orden (lenguaje y semántica de LSO). Esto significa que tendríamos que presentar la metateoría de primer orden para poder mostrar las limitaciones de la lógica de segundo orden (y con ello de la lógica de orden superior) al no tener una validez recursivamente enumerable[38]. Además, demostrar plausiblemente que la misma noción de lógica de segundo orden no está extensionalmente bien determinada[39] y, finalmente, explicitar la tensión existente entre lo que sabemos y lo que podemos probar[40].

34 *Ibid.*

35 *Ibid.*, 393-409. Hunter: ***Metalógica***, 1981, pp. 161-291; Garrido: ***Lógica simbólica***, 1973, 326.

36 *Ibid.*, 327. En una lógica completa hay muchas teorías que no lo son. La teoría de los números naturales no es una teoría completa pero todas sus sentencias son de la lógica de primer orden que es una lógica completa. Manzano-Huertas, *Op. cit.*, ***Lógica para principiantes***, p. 311.

37 Manzano, *Op. cit.*, ***Teoría de modelos***, p. 19-22.

38 "Las propiedades lógicas van decreciendo: mientras la lógica proposicional posee un cálculo deductivo correcto, completo y decidible, la de primer orden posee un cálculo correcto y completo, pero ya no es decidible, y la de segundo orden ni es decidible ni posee un cálculo completo". Manzano: ***Lógica para principiantes***, 2000, p. 121. En la lógica de primer orden no sólo no tenemos tablas de verdad, sino que se puede demostrar que la lógica de primer orden no es decidible, i.e, no existe ningún procedimiento efectivo (o algoritmo) que en un número finitos de pasos nos diga si una fórmula es válida o no lo es. Manzano, *Op. cit.*, "Divergencia y rivalidad...", p. 77.

39 Mosterín: "Lógica y teoría de conjuntos", pp. 236-237, 2004.

40 . Manzano, (cap) 17, p. 2. http://logicae.usal.es. Sabemos por el teorema de Lindström que la lógica de primer orden es la lógica más potente que verifica simultáneamente completud, compacidad y Löwenheim-Skolen. Manzano: "Una nueva prueba de la incompletud de la lógica de segundo orden", p. 51, 2001.