LÓGOI Revista de Filosofía Nº 16. Semestre julio-diciembre 2009

pp. 89-102

Modelos y heurística

María Carolina Álvarez
Universidad Central de Venezuela
malvarezpuerta@yahoo.es

Resumen

El presente trabajo plantea algunos procedimientos heurísticos, tal como son esbozados por el matemático George Polya, aplicados sobre el sistema formal MIU presentado por Hofstadter en su libro *Gödel, Escher y Bach: una eterna trenza dorada.* Como resultado de esta aplicación de los procedimientos heurísticos surgen los modelos del sistema MIU que presentamos en este trabajo.

Palabras clave: Heurística, *ars inveniendi*, analogía, generalización, descomposición, composición, elementos auxiliares y problemas auxiliares.

Models and Heuristics

Abstract

This paper presents some heuristics procedures exposed by the mathematician George Polya, applied on the formal system MIU presented by Hofstadter in his book *Gödel, Escher y Bach: an Eternal Golden Braid.* As a result of the application of these heuristic procedures raise the models of system MIU that are presented in this paper.

Key words: Heuristic, *ars inveniendi*, analogy, generalization, decomposition, composition, auxiliary elements and auxiliary problems.

Recibido: 22-04-2009 / Aprobado: 29-06-2009

En el presente artículo planteamos algunos de los procedimientos heurísticos, tal como los manifiesta el matemático George Polya en su texto *Cómo platear y resolver problemas.*[1] Usaremos para ello un trabajo conjunto realizado por la Prof. Kris Martins y mi persona sobre el acertijo MIU propuesto por Hofstadter en su libro *Gödel, Escher y Bach: una eterna trenza dorada.*[2] Antes de pasar a las recomendaciones heurísticas de Polya permítasenos presentar el sistema formal propuesto por Hofstadter.

El sistema formal MIU[3] consta de 4 reglas básicas que se mencionan a continuación:

- Regla 1: Si se tiene una cadena cuya última letra sea I, se puede agregar una U al final.
- Regla 2: Supongamos que se tenga Mx. En tal caso, puede agregarse Mxx a la colección.
- Regla 3: Si en una de las cadenas de la colección aparece la secuencia III, puede elaborarse una nueva cadena sustituyendo III por U.
- Regla 4: Si aparece UU en el interior de una de las cadenas, está permitida su eliminación.

La pregunta que plantea el autor, en forma de un acertijo, es si se puede llegar a producir MU partiendo de la premisa MI, en otras palabras, si MU es un teorema del sistema. Luego de algunos ensayos con las reglas del sistema debimos aceptar que la respuesta era negativa. Sin embargo, en el transcurso de estos ensayos surgieron, por un lado, posibles modelos del sistema y, por otro, extensiones del lenguaje que nos permitieron el descubrimiento de modelos diferentes. Antes de llegar allí veamos rápidamente los primeros ensayos con el sistema.

Por medio de la regla de crecimiento de las cadenas –R 2- obteníamos cadenas del siguiente tipo:

1 G. Polya: *Cómo plantear y resolver problemas*, México, Editorial Trillas, 1972.

2 D. Hofstadter: *Gödel, Escher y Bach: una eterna trenza dorada*, México, Consejo Nacional de ciencia y Tecnología, 1982.

3 Hofstadter, D., *Op. cit.*, p. 39 y ss.

MI
MII
MIIII
MIIIIIIII
MIIIIIIIIIIIIIIII
Etc.

Con R3 podíamos sustituir obteniendo combinaciones del tipo:

MIU
MIIUU
MIUUUUU
MIIUUUUUUUUUU
MIUIUIUIU
etc.

Y usando la regla de eliminación –R4- en algunas de las cadenas siempre resultaba:

MIU o MUI

De estos experimentos dedujimos varias cosas; entre ellas:

- M es una constante en las cadenas
- Las cadenas crecían en función exponencial de base 2
- La relación de sustitución era de 3:1 así que siempre que sustituíamos 3 Ies por una U nos sobraba una I debido al crecimiento de las cadenas en función exponencial base 2.

En este punto de nuestra exposición podemos introducir algunas de las tesis de Polya sobre el planteamiento y la resolución de problemas. La Heurística o *ars inveniendi*, como expone el autor, tenía como "objeto el estudio de la reglas y los métodos de descubrimiento e invención"[4]. El autor manifiesta que desde este punto de vista es una ciencia por completo olvidada y que su trabajo pretende revivirla desde una perspectiva moderna, así ella "trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular a las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso"[5]. En este sentido el autor expresa:

4 Polya, G., *Op. cit.*, p. 101-102.

5 *Ibid.*, p. 102.

> Al tratar de resolver un problema, consideramos sucesivamente sus diversos aspectos, les damos vueltas sin cesar en la mente; una VARIACIÓN DEL PROBLEMA es esencial para nuestro trabajo. Podemos variarlo DESCOMPONIENDO Y RECOMPONIENDO sus elementos, refiriéndonos a la DEFINICIÓN de algunos de sus términos; podemos también utilizar los recursos que ofrecen la GENERALIZACIÓN, PARTICULARIZACIÓN Y ANALOGÍA. Una variación del problema puede llevarnos a ELEMENTOS AUXILIARES o al descubrimiento de un PROBLEMA AUXILIAR más accesible.[6]

Entonces algunas de las operaciones mentales que intervienen en el proceso de descubrimiento son: la descomposición y la recomposición del problema, la generalización, la particularización, la analogía y el uso de elementos y/o problemas auxiliares. Nuestras tres consecuencias anteriores son producto de una generalización sobre los ensayos con las reglas del sistema.

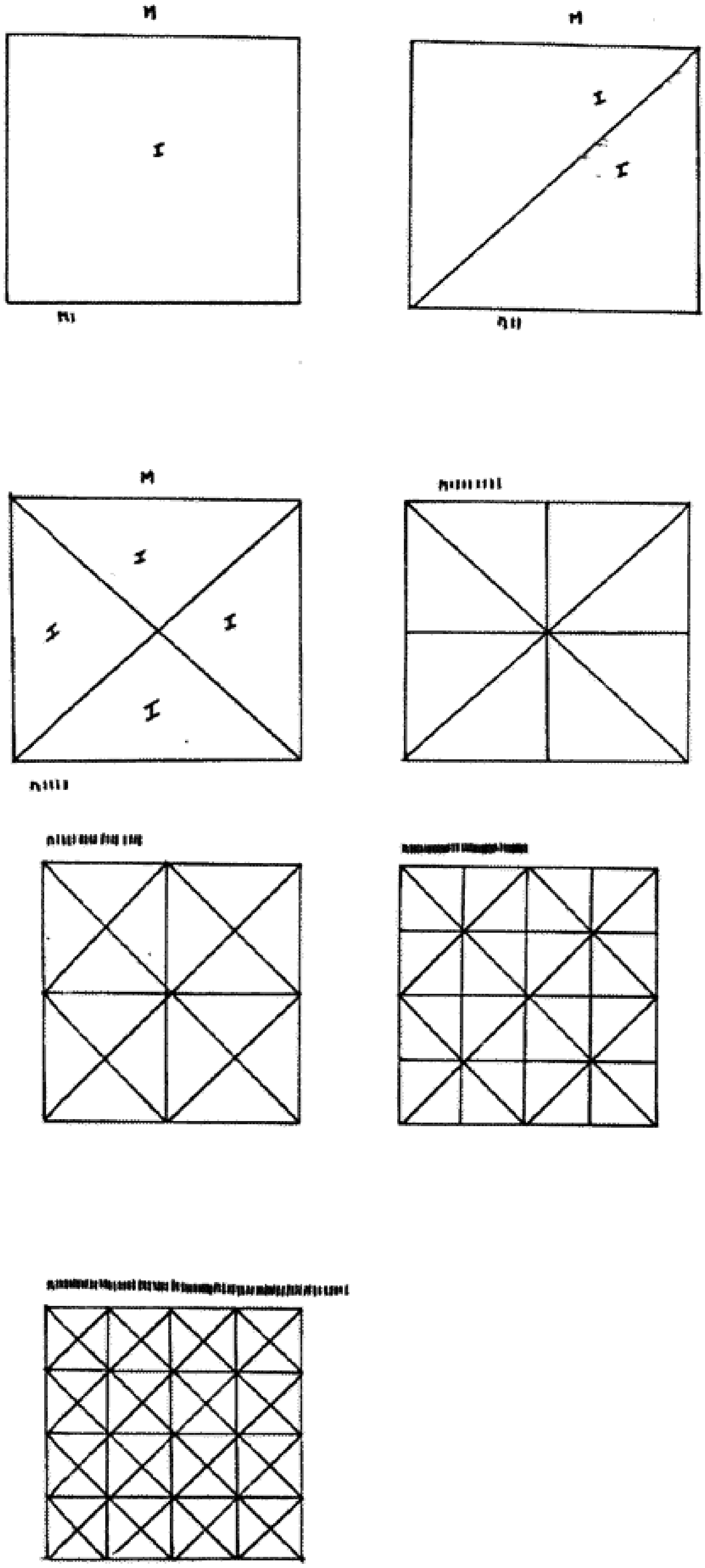
Paralelo al juego con las reglas del sistema y debido quizás a mi formación como artista plástico tuve que echar mano del recurso visual confeccionando una figura, otra de las recomendaciones de Polya, que me permitiera comprender mejor el problema. De esta manera obtuvimos el primero de los posibles modelos geométricos del sistema.

Modelo Reticular:

Sea M un cuadrado y la I el espacio interno del mismo. A través de trazos y siguiendo la forma de crecimiento de las cadenas obtenemos la división de I en 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc. U sería: 3/4, 3/8, 3/16, 3/32, 3/64, etc., de esos espacios internos.

6 *Ibid.*, p. 103.

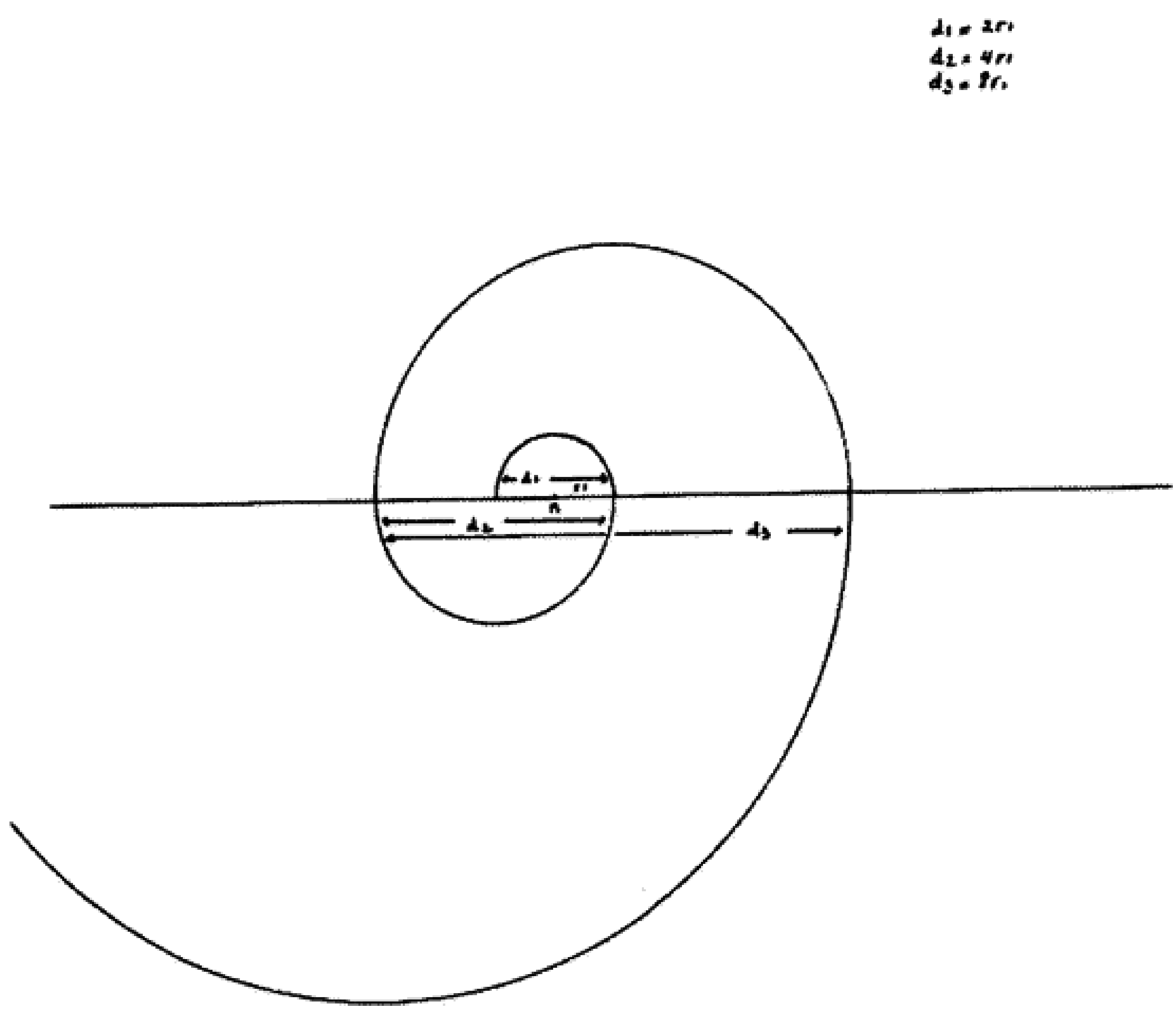
ISSN: 1316-693X


M
I
M
I
I
M
I
I
I
I

A éste le siguieron un modelo en espiral, modelos circunscritos en un círculo y un modelo de red.

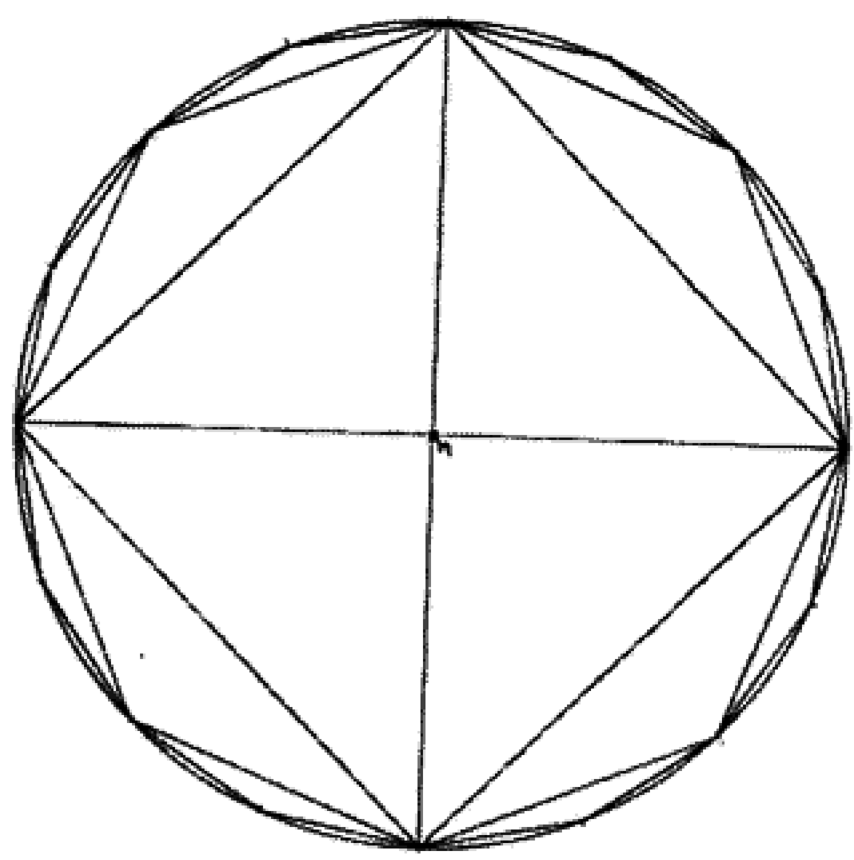
Modelo en Espiral:

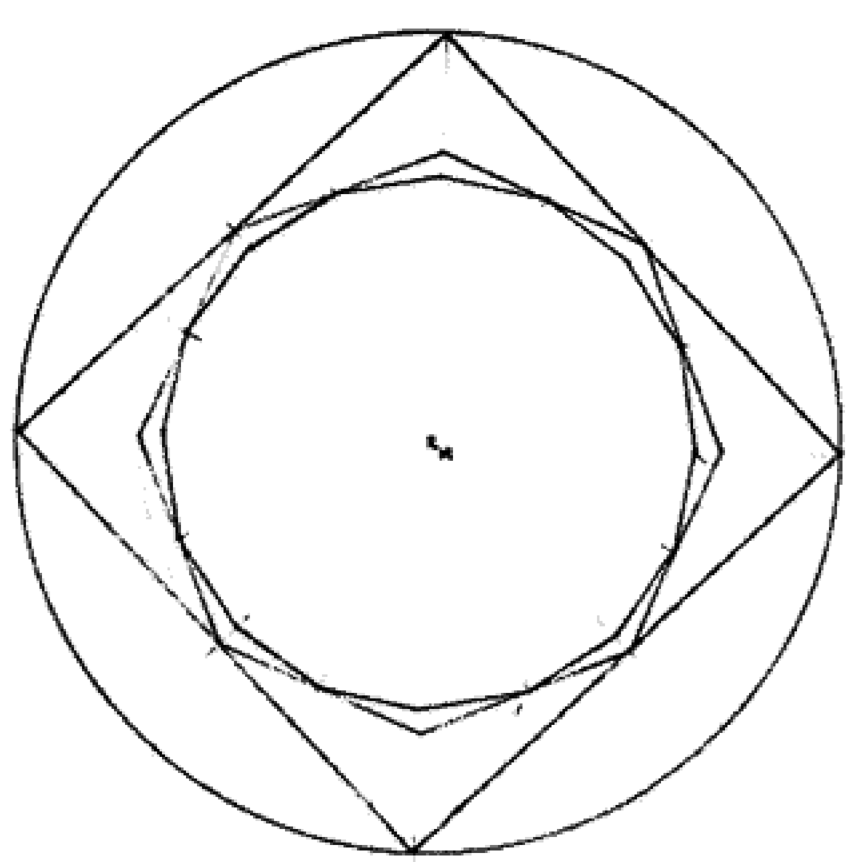
Sea M un punto en una línea e I un radio r1. Se traza una semicircunferencia de este radio r1, después se toma como radio para la siguiente semicircunferencia el diámetro de la semi circunferencia anterior r2, haciendo centro en uno de los puntos donde la primera semi circunferencia corta con la línea. La tercera semicircunferencia tomará como radio el diámetro de la anterior r3 y como centro uno de los puntos donde la semicircunferencia de r2 corta con la línea. Los radios crecen en función exponencial de base dos y U obtiene el valor de tres cuartas partes de cada radio.



Modelo Figuras Geométricas Inscritas en un Círculo Dado:

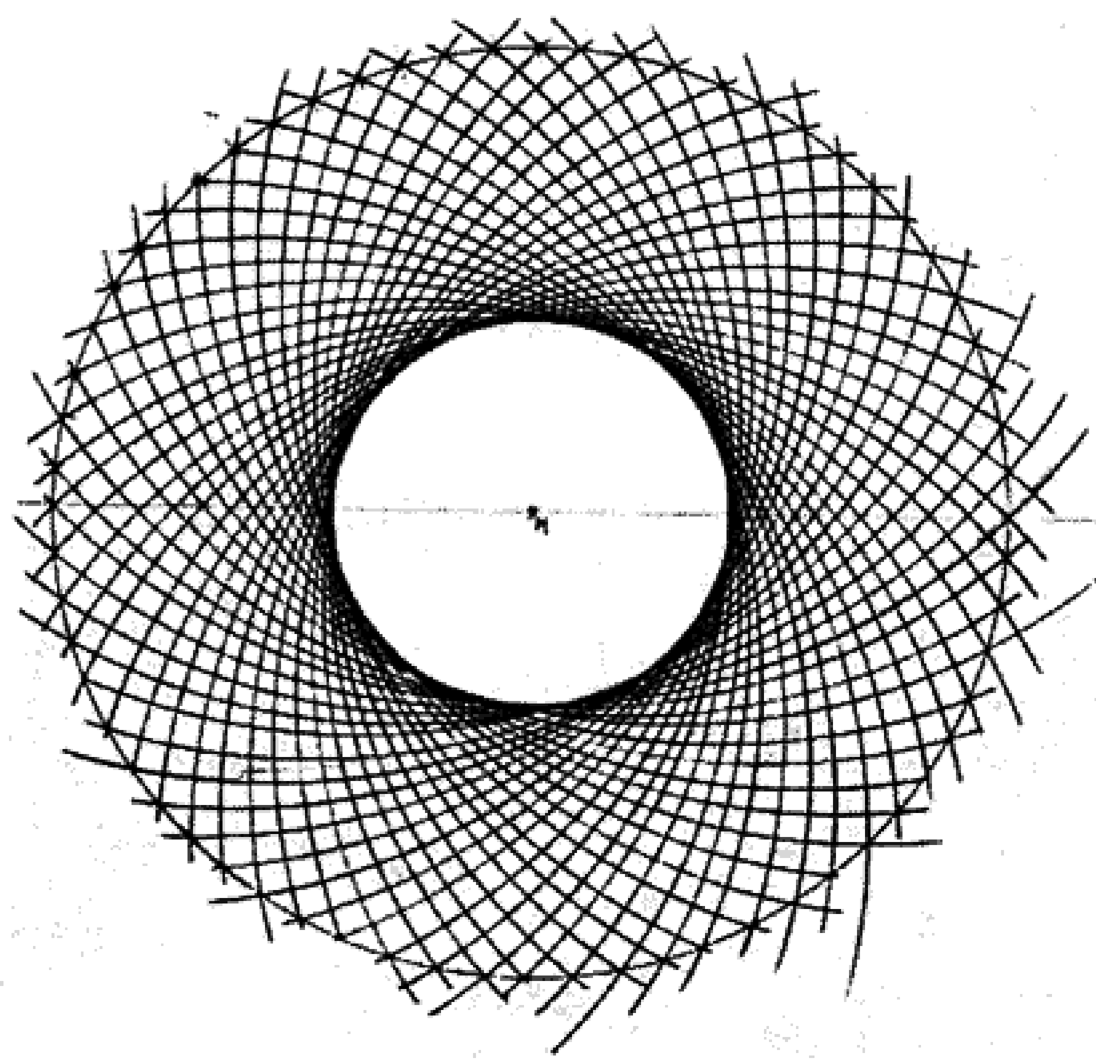
Sea un círculo cuyo centro es M y cada trazo en este círculo sea I. MI es el círculo con uno de los diámetros y MII el círculo con dos diámetros perpendiculares entre sí. A partir de aquí se construye un cuadrado inscrito en el círculo (4 trazos= MIII). Dividiendo cada lado del cuadrado entre dos se obtienen un punto en el arco de la circunferencia que se convierte en el vértice de la siguiente figura: el octógono (8 Lados = MIIIIIIII). Siguiendo este procedimiento se obtienen las restantes figuras de 16 lados, 32, lados, 64 lados, etc. El valor de U, como en los casos anteriores, es de tres, en este caso, 3 lados. El mismo procedimiento se puede realizar hacia el interior del cuadrado.





Modelo de Red Inscrita en un Círculo:

Sea un círculo cuyo centro es M y cada trazo en este círculo sea I. MI es el círculo con su diámetro y MIII el círculo con sus dos diámetros perpendiculares entre sí. A partir de aquí y haciendo centro en algún punto en el que uno de los diámetros corte la circunferencia se traza un arco cuya amplitud sea correspondiente a un cuarto de la circunferencia, de esta manera, se traza una roseta de 4 puntas. Los cortes de los arcos al interno de esta roseta indican los puntos en la circunferencia que servirán de apoyo para trazar rosetas de 8, 16, 32, 64 etc., puntas.



Todos estos modelos dan cuenta del uso de figuras que indica Polya como clave heurística; en este sentido recomienda: "Así pues, incluso si el problema no es geométrico, usted puede tratar de dibujar una figura. Encontrar una representación geométrica clara a un problema no geométrico puede permitir un avance sensible hacia la solución" [7]. Pero además, dan cuenta de la analogía y su relación con la solución de problemas, sobre la cual, el matemático escribe:

7 *Ibid.*, p. 96.

La inferencia por analogía parece ser el tipo de conclusión más común y sin duda alguna el más útil. Proporciona hipótesis más o menos plausibles, que la experiencia o un estricto razonamiento podrán quizás confirmar.[8]

Otras analogías que obtuvimos después de algunos ensayos consisten en: la similitud entre el crecimiento de las cadenas –en potencia base 2- y la división celular de los gametos o la construcción de la tabla de I Ching; la relación entre R2 y R3, reglas de crecimiento y reglas de eliminación respectivamente, y las leyes de Mendel. Si bien todavía no habíamos demostrado la imposibilidad de obtener MU en el sistema, estas figuras y analogías nos abrieron la puerta para otro modelo, un modelo musical, que a su vez nos sugirió la pregunta sobre mundos posibles en los cuales se puede obtener MU.

Modelo Musical:

Tomando M como el compás de compasillo, I como cualquiera de las figuras musicales: redonda, blanca, negra, corchea, semi corchea, fusa y semifusa y la U, siguiendo la regla de sustitución R3, tres figuras de la asignada a I. Un compás de compasillo es un compás de 4 tiempos en el que entran 4 figuras base que en este caso es la negra (¼ de redonda), así en cada compás tendremos o una redonda, o 2 blancas, o 4 negras, o 8 corcheas, o 16 semi corcheas, o 32 fusas o 64 semifusas. Ahora según R3, sustituyendo a razón de 3 I por U y como la negra es la figura base del compás, podemos sustituir una blanca y un puntillo para un total de tres tiempos. El último tiempo podrá ser llenado con:

- una negra
- 2 corcheas
- 4 semi corcheas
- 8 fusas
- 16 semi fusas

En este modelo se obtiene MU si se incluye en el sistema el silencio de negra para ocupar el último tiempo del compás, es decir, si se introduce una nueva regla en el sistema. Este ensayo da

8 *Ibid.*, p. 62.

cuenta de lo que Polya denomina Descomposición y Recomposición del problema. Al respecto escribe:

> Considera el objeto como un todo, pero esa impresión quizás no sea muy precisa. Un detalle le llama la atención. Después se concentra en otro detalle, y más tarde, sobre otro nuevamente. Diversas combinaciones de detalles se pueden presentar y al cabo de un momento, mira el objeto como un todo, pero lo ve de manera diferente. Usted ha descompuesto el todo en sus diversas partes y ha recompuesto dichas partes en un todo más o menos diferente[9]

En nuestro caso, el detalle que nos llamó la atención fue la M como constante similar a una clave musical en un pentagrama.

Más adelante recomienda conservar la incógnita mientras se cambiar los datos y la condición del problema a fin de llevar a cabo una transformación del mismo, cosa que realizamos en este modelo cuando se sugiere la posibilidad de MU si se incluye el silencio de negra, pero también cuando nos preguntamos por mundos posibles donde es factible encontrar a MU, así descubrimos esta posibilidad en mundos matemáticos y químicos:

Mundo Matemático

Interpretando M como la multiplicación con sus propiedades, a I se le asigna el valor numérico 1 y a U, siguiendo R3, el valor numérico 3 podemos obtener MU si aceptamos el elemento neutro de la multiplicación

Interpretación:

- M= Multiplicación
- I= 1
- U=3

1. MI
2. MII R2 (1)
3. MIIII R2 (2)
4. MIU R3 (3) o R1 (1)
5. MU (aceptando el elemento neutro de la multiplicación: 1 x 3=3)

De la misma manera podemos obtener MU a través de la multiplicación Binaria, interpretando M como la multiplicación, I como 1 y U como O.

9 *Ibid.*, p. 73.

Interpretación

- M= Multiplicación Binaria
- I= 1
- U=0

1.- MI (MI=1)
2.- MUI R1 (1)
3.- MU

Siguiendo la tabla de multiplicación binaria:

X	0	1
0	0	0
1	0	1

UI= 0 x 1= 0

Mundo Químico

Supongamos que cada uno de los valores del sistema MI (M, I, U) se corresponde con uno de los elementos (hidrógeno, oxígeno y sulfuro) de la manera siguiente:

M	=	H2
I	=	O2
U	=	S

En consecuencia los siguientes teoremas del sistema MI, corresponden a:

MI	=	H2O	=	Agua
MII	=	H2O2	=	Peróxido de Hidrógeno
MUI	=	H2SO	=	Ácido Sulfúrico
MUII	=	H2SO2	=	Ácido Hiposulforoso
MU	=	H2S	=	Sulfuro de Hidrógeno

En los tres casos hay una extensión del lenguaje del sistema: la aceptación del elemento neutro en la multiplicación, la aceptación de los resultados de la multiplicación binaria y la aceptación de las propiedades de ciertos elementos químicos.

Polya hace la distinción entre problemas por resolver y problemas por demostrar; así dice que el propósito de un problema por resolver es descubrir la incógnita mientras que el de un problema por demostrar es "mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada"[10]. Hasta este momento hemos jugado con el problema por resolver y esto nos dio herramientas para encarar nuestro problema por demostrar: la imposibilidad de obtener MU en el sistema. En resumidas cuentas nos quedaba elaborar pruebas sintácticas y semánticas que demostraran tal imposibilidad

Prueba Sintáctica

Supongamos que MU sea posible dentro del sistema. Según las reglas, U se puede obtener de una de éstas dos formas: con R 1 y con R 3.

a) Si se hubiese obtenido por R1, entonces es el resultado de haber agregado la U a una cadena que terminaba en I, y por lo tanto la U no estaría sola para poder formar directamente MU.

b) Si se hubiese formado por R3, entonces MU debía procede de una cadena como MIII, pero según las reglas de formación y eliminación de caracteres sólo es posible formar MI (axioma inicial), MII (por R2), MIIII (por R2 nuevamente).

En consecuencia podemos afirmar que MU no es un teorema posible del sistema.

Prueba Semántica

1. Revisemos ahora el sistema desde una perspectiva numérica. Las reglas que permiten aumentar los caracteres en las cadenas son la 1 y la

2. De manera que las cadenas aumentan o bien agregando una U al final (sólo cuando terminan en I), o bien copiando dos veces exactamente los mismos caracteres en el mismo orden (Mx ➔ Mxx). De manera que si las cadenas aumentan mul-

10 *Ibid.*, p. 161.

ISSN: 1316-693X

tiplicando por dos y sólo se pueden eliminar cada III para transformarla en U (R3), siempre quedará una diferencia, ya que $3 - 2 \neq 0$. O dicho de otra manera no hay ningún número múltiplo de 2 que sea divisible por 3.

Después de lo cual habíamos demostrado la imposibilidad de que nuestra incógnita perteneciera al sistema.

Sin embargo, durante nuestra exposición hemos usado el término "modelo" de forma amplia refiriéndonos a los resultados de nuestros ensayos con el sistema y que por ahora son sólo posibles modelos que surgen en el contexto de problemas por resolver y que pasan al estatus de problemas por demostrar, en otras palabras, nos queda demostrar que los resultados de nuestros ensayos son efectivamente modelos del sistema.

Esta presentación es sólo una pequeña muestra en aras de la revalorización de la heurística desde la propuesta de Polya o, si se quiere, desde el escorzo de Leibniz[11], para quien el *ars indicando* o arte de juzgar –entendido como el análisis de los conceptos en sus elementos simples– se distinguía del *ars inveniendi* o el arte de descubrir –que no es más que la síntesis o combinación de conceptos orientada por la práctica. Definición que nos recuerda los planteamientos kantianos[12] acerca de la matemática como construcción de conceptos en la intuición y que nos abren la puerta para pensar en la posibilidad de una interpretación de los juicios de la matemática como juicios heurísticos o hipótesis plausibles acerca de ciertos problemas que deben ser demostrados posteriormente. Idea ésta que parece resonar en las palabras de Polya cuando afirma: "Las matemáticas presentadas con rigor son una ciencia sistemática deductiva, pero las matemáticas en gestación son una ciencia experimental, inductiva." [13]

No queremos finalizar esta presentación sin agradecer al Prof. Jesús Baceta su acertada pregunta acerca del acertijo MU que dio pie a este trabajo.

11 G. W. Leibniz: *Monadología*, en *Obras escogidas*, Ezequiel de Olazo (Coord.), Buenos Aires, Editorial Charcas, 1982.

12 I. Kant: *Crítica de la razón pura*, Madrid, Alfaguara, 6ta edición, 1988.

13 Polya, G., *Op. cit.*, p. 116.