¿Son posibles las divergencias genuinas en lógica?

Por *Levis I. Zerpa Morloy*

Resumen

El presente trabajo evalúa, a la luz de ciertos resultados en lógica paraconsistente, específicamente los sistemas M y N de Bunder, los argumentos esgrimidos en *Philosophy of Logic* de Quine en contra de la posibilidad de una divergencia genuina en lógica. A diferencia de Quine, se muestra que podemos tener una divergencia genuina empleando las conectivas usuales con el mismo significado clásico y sin trivializar la distinción verdad/falsedad. Finalmente se considera la contribución de Lukasiewicz a la interpretación de un conocido y difícil pasaje de los *Segundos Analíticos*, a saber, A11, 77a 10-22, que versa sobre la posibilidad de construir silogismos válidos (no verdaderos) con premisas contradictorias.

¿Are Genuine Divergences Possible in Logic?

By *Levis I. Zerpa Morloy*

Abstract

The present essay works, under the light of certain results from the paraconsistent lógic, specifically from the systems of M. and N. of Bunder, the resulting arguments from the Philosophy of Logic of Quine, against the possibility of a genuine divergence in logic. As opposed to Quine, we show that it is possible to obtain a genuine divergence, using the usual connectives with their classical meaning and without trivializing the distinction between truth/ falsehood. Finally, we consider the contribution of Lukasiewicz of the interpretation of a known and difficult passage from the Second Analitics, that is, A11, 77a 10-22, which talks about the possibility of the construction of valid syllogisms (not true), with contradictory premises.

1. Introducción

Como es sabido, en *Word and Object* W. V. Quine[1] expone su famosa tesis sobre la indeterminación de la traducción (de sentencias). Según esta tesis, existe una indeterminación de la traducción radical[2] de palabras y frases, y existe incluso una incertidumbre inductiva en lo referente a sentencias observacionales [3]. En contraste, la traducción de las conectivas veritativo-funcionales está fuera del alcance de la indeterminación. Si bien no repetiremos aquí la argumentación de Quine respecto a los casos afectados por la indeterminación, conviene examinar las razones que alega para justificar la mencionada excepción.

Una vez hecho este examen, evaluaremos lo obtenido a la luz de ciertos resultados en lógica paraconsistente, específicamente los sistemas M y N de Bunder [1989]. Mostraremos que los argumentos esgrimidos en Philosophy of Logic (Quine [1970]) en contra de la posibilidad de una divergencia genuina en lógica (sin cambios de significado de las conectivas u otros símbolos lógicos, es decir, sin "cambiar de tema") son mucho menos fuertes de lo que aparentan. No obstante, esto no implica abandonar la conveniencia pragmática de preferir un sistema de lógica clásica en la mayoría de las aplicaciones relevantes (lo cual es ilustrado mediante un ejemplo tomado de la historia de la termodinámica clásica). Dicho de otro modo: si bien es excesivo el precio a pagar por la violación de un principio clásico tan fundamental como el de no-contradicción, las razones para no admitir un sistema de este tipo no son de principio, contrariamente a lo que parece sugerir el dictum "cambio de lógica es cambio de tema" ("change of logic, change of subject"). Por tanto, podemos tener una divergencia genuina empleando las conectivas usuales con el mismo significado clásico y sin trivializar la distinción verdad/falsedad. Finalmente consideramos la contribución de Lukasiewicz a la interpretación de un conocido y difícil pasaje de los Segundos Analíticos, a saber, A11, 77a 10-22, que versa sobre la posibilidad de construir silogismos válidos (no verdaderos) con premisas contradictorias.

---

[1] Quine [1960], cap. 2.

[2] Es decir, traducción directa o "por vez primera", esto es, sin ningún manual de traducción previo ni analogías con otros lenguajes similares conocidos (*"What is relevant rather to our purposes is radical traslation, i.e., translation of the language of a hitherto untouched people."* Quine [1960], p. 28).

[3] *Ibid.*, §10.

2. Traducción y divergencia

Quine favorece la atribución de la divergencia a una diferencia de significado más que a un desacuerdo de creencia entre el lógico divergente (o el nativo) y el lógico clásico (o el lingüista) [4]. Si bien no parece descartar del todo la eventual justificación de un ocasional cambio de significado de las conectivas, condena decididamente toda exposición de un sistema de lógica divergente (o toda traducción de la lengua extraña del nativo) en la que:

i) se atribuyan a las conectivas sentenciales el mismo significado que en la lógica clásica y, a la vez,
ii) se ponga en boca del lógico divergente (o del nativo) la violación expresa de alguna ley de la lógica clásica, por ejemplo, al tolerar alguna restricción en la validez de la regla de eliminación débil de la negación ~: $A \wedge \sim A \_ B$ (o vg. al traducir una expresión del nativo por una expresión que en castellano tenga la forma '... y no ...').

Examinemos con un poco más de detenimiento las premisas de esta argumentación que son relevantes para nuestros fines.

Las premisas de la argumentación de Quine son las siguientes:

(M) **Principio de acuerdo maximalizado**: "*The maxim of translation underlying all this is that assertions startingly false on the*

[4] También podría pensarse en el caso del historiador de la ciencia que intenta exponer a sus contemporáneos un texto científico antiguo, tomando en cuenta la hipótesis (de inconmensurabilidad; véase Kuhn [1989]) según la cual existen divergencias insalvables de significado y de creencia entre algunos de los conceptos fundamentales de la teoría antigua y los conceptos fundamentales de la teoría en vigencia. No obstante, es interesante observar que la escogencia de ejemplos deliberadamente imprecisos inmersos en contextos con un grado muy bajo de formalización es frecuente en las discusiones sobre inconmensurabilidad de teorías. El ejemplo de la química del flogisto analizado en Kuhn [1989] es típico a este respecto. En efecto, si la teoría del calórico se entiende como la idea (vagamente expresada) que el calor es una especie de fluido cuya cantidad total es invariable, de tal modo que el calentamiento de un cuerpo consiste en la transferencia de este fluido de un cuerpo a otro, entonces quizás puedan aparecer divergencias del tipo mencionado. Pero si consideramos que una parte fundamental de esta teoría se traduce como la elección del factor integrante:

f = 1 para la forma diferencial

$Q/f = 1/f[^{\wedge}V(V, \theta)DtV + KV(V, \theta)Dt\theta]$

en el dominio de la teoría, i.e. el primer cuadrante del eje V-q (donde Q representa el calentamiento del cuerpo, V el volumen, q la temperatura empírica, LV y KV el calor latente y el calor específico a volumen constante, DtV y Dtq las derivadas con respecto al tiempo del volumen y la temperatura respectivamente), mientras que consideramos a f=q como la elección correspondiente a la teoría dinámica, entonces estas divergencias desaparecen (véase Zerpa [1994]). Por tanto, no nos referimos aquí a las supuestas divergencias de creeencia o de significado producto de la vaguedad, sino a las divergencias de este tipo en contextos precisos.

face of them are likely to turn on hidden differences of language." (Quine [1979], p. 59).

(C) La adopción del **criterio clásico para las funciones veritativas**, a saber, la elección de conectivas monádicas y diádicas con los significados clásicos. En el caso del nativo, Quine afirma que al traducir su lenguaje le imponemos nuestra lógica ("*We build the logic into our manual of translation*", Quine [1960], p. 82). En el caso del lógico divergente, "*...the notation ceased to be recognizable as negation when they [e. g. some paraconsistent logicians] took to regarding some conjunctions of the form 'p.~p' as true, and stopped regarding such sentences as implying all others. Here, evidently, is the deviant logician's predicament: when he tries to deny the doctrine he only changes the subject.*" (Quine [1960], p. 81).

(O) El canon "**preservar lo obvio**": "*The canon 'Save the obvious' bans any manual of translation that would represent the foreigners as contradicting our logic.*" (ibíd., p. 83).

(A/D) La adopción de las disposiciones de asentimiento (*assent*) y disentimiento (dissent) como coordenadas básicas de la significación estimulativa (*stimulus meaning*) [5].

Respecto de la última premisa cabe observar que las nociones de asentimiento y disentimiento o discrepancia a una sentencia dada son recursos empleados para conceptualizar u objetivar los datos que proporciona la conducta verbal. Pero no son éstos los únicos recursos disponibles —como lo han señalado Chomsky y Hintikka— ni su adopción obliga a descartar una lógica no clásica como parte del manual de traducción, como lo ha mostrado Haack. Más específicamente, Hintikka ([1973], §10) ha argüido de un modo interesante en favor de otras disposiciones *qua* criterios de traducción para las conectivas sentenciales y para los cuantificadores. Y en lugar de excluir los casos de confusión o perplejidad (*puzzlement*) por parte del nativo frente a una expresión determinada, Haack [6] propone considerar incluirla como coordenada comportamental adicional (por ejemplo, la negación de una sentencia es esa sentencia a la cual i) asentimos si disentimos de la sentencia original, o ii) disentimos si asentimos a la sentencia original, o iii) reaccionamos con perplejidad si reaccionamos con perplejidad a la sentencia

[5] Véase Quine [1960], pp. 32-3.

[6] Véase Haack [1977], p. 19 y Haack [1982], cap. 3, §2.

original), lo cual implicaría la sustitución de (C) por la admisión de una lógica trivalente como lógica subyacente al manual de traducción.

Respecto a las restantes premisas, conviene discutirlas en conjunto. Quine [1960] proporciona dos razones que hacen plausible la adopción de (M). La primera es la siguiente: debido a que las conectivas se aprenden sólo en contextos sentenciales —pues ellas enlazan sentencias completas —, y la indeterminación de la traducción afecta a las sentencias, entonces "*dropping a logical law means a devastatingly widespread unfixing of truth values of contexts of the particles [sentential connectives] concerned, leaving no fixity to rely on in using those particles.*" (Quine [1960], p. 60).

No obstante, los resultados de Bunder [1989] muestran que si se construye el sistema del modo adecuado, puede recusarse una ley lógica —específicamente, cierta versión del principio de no-contradicción y, por ende, la validez general de la regla de eliminación débil de la negación— de tal modo que el terreno queda lo suficientemente firme como para dar un pleno y estable significado a las conectivas aún después de producirse el cambio en los valores veritativos (esto se logra, como veremos en §3, mediante dualidad si aceptamos cierta hipótesis inicial). Esos resultados también restan plausibilidad a la otra razón con la que Quine pretende justificar a (M), a saber, que un error en la traducción es más probable que la admisión de una contradicción palmaria por parte del lógico paraconsistente (o del nativo). Para constatar esto, exponemos a continuación y de manera directa —es decir, sin traducción ni explicaciones subsidiarias— el sistema M de cálculo sentencial de Bunder y formularemos ciertas definiciones importantes.

3. El sistema M

Alfabeto = {Variables sentenciales, ~, x}. La definición de fórmula es la usual. A, B, C, ... serán usadas como variables metalingüísticas que denotan fórmulas de M. La negación ~ se toma en su sentido clásico (lo cual será mostrado y discutido en detalle) y la nueva conectiva 'x' se especifica mediante la siguiente tabla de verdad:

A	B	AxB
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	0

Sea $\Gamma =_{Df} \{x/x$ es una fórmula de M$\}$ y sea $\Delta \subseteq \Gamma$. $\Delta \mid\!\!-_{M} A$ o $\Delta \mid\!\!-$ A se lee "A es una consecuencia (en M) de un conjunto Δ de fórmulas (de M)".

REGLA DE INFERENCIA: A, AxB $\mid\!\!-$ B.

ESQUEMAS DE AXIOMAS:
(B1) $\mid\!\!-$A x (B x A).
(B2) $\mid\!\!-$(A x (B x C) x ((A x B) x (A x C)).
(B1) $\mid\!\!-$(~B x ~A) x ((~B x A) x B).

¿Qué significa la conectiva 'x'? Si partimos de la hipótesis que "1" denota el valor "verdadero" (V) y "0" el valor "falso" (F), entonces, según la tabla de verdad podemos formular el siguiente **criterio de traducción**:

(*) $$A \text{ x } B = \sim\underline{A} \wedge \underline{B},$$

donde $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son fórmulas de alguna axiomatización de la lógica clásica, por ejemplo, el sistema de Mendelson [1979]. Más aún, como ya habrá notado el lector, el conjunto de axiomas y la regla de inferencia de M es sería, según esta interpretación, **dual** del conjunto de axiomas y la regla de inferencia (a saber, el modus ponens) del sistema de cálculo sentencial clásico formulado en Mendelson ([1979], cap. 2). Pero, ¿esto quiere decir que a toda fórmula clásica —expresable en el sistema de Mendelson— le corresponde una fórmula en M y viceversa? O dicho de otro modo, ¿es traducible cada fórmula de M en una fórmula clásica y viceversa?. Si invertimos la hipótesis inicial y consideramos a "1" como "falso" y a "0" como "verdadera" entonces estas preguntas tienen una respuesta muy sencilla: la tabla de verdad de la conectiva x coincide con la tabla de la implicación clásica, luego,

(**) $$A \text{ x } B = \underline{A} \supset \underline{B},$$

y la regla de inferencia se interpreta como el modus ponens usual.

En caso contrario, vale la pena considerar el siguiente **algoritmo de traducción** proporcionado por Bunder.

REGLA DE TRANSFORMACION:

(R1) Sustitúyase toda ocurrencia de $\vdash A$ por $\vdash A$.

(R2) Sustitúyase toda ocurrencia de $\sim(B \supset C)$ por $\sim B \times \sim C$.

(R3) Elimínese una ~ de cada variable sentencial que posea una o más ocurrencias de esta conectiva.

De ahora en adelante denominaremos por "C" el cálculo (clásico) de Mendelson. Llamaremos **transform-M de una fórmula $\underline{A}$** del cálculo de Mendelson a la fórmula B obtenida en M aplicando (R1)-(R3) a la fórmula dual A de $\underline{A}$. Igualmente, $\underline{A}$ es el transform-C de B. Por ejemplo, es fácil comprobar que (B1)-(B3) se obtienen de los axiomas de Mendelson:

(A1) $\vdash \underline{A} \supset (\underline{B} \supset \underline{A})$.

(A2) $\vdash (\underline{A} \supset (\underline{B} \supset \underline{C}) \supset ((\underline{A} \supset \underline{B}) \supset (\underline{A} \supset \underline{C}))$.

(A1) $\vdash (\sim\underline{B} \supset \sim\underline{A}) \supset ((\sim\underline{B} \supset \underline{A}) \supset \underline{B})$,

aplicando (R1)-(R3).

Sobre la base de este criterio de traducción podemos formular dos definiciones que son cruciales para la argumentación que presentamos en este trabajo. Usaremos $\neg$, & y sii para denotar la negación, la conjunción y la equivalencia (en sentido clásico) en el **metalenguaje** que usamos para hablar de M o de C; respecto a los restantes símbolos, el contexto aclarará a qué nivel de lenguaje se emplea.

DEF. 1: i) Una expresión de la forma $A \times A$ se denomina, desde el punto de vista sintáctico, **inconsistencia**$_l$ **o inconsistencia en el lenguaje-objeto de M** y desde el punto de vista semántico, **contradicción en M**. (El transform-C de $A \times A$ es $\sim A \wedge A$).

ii) Una expresión de la forma $\vdash A$ & $\vdash \sim A$ se denomina **inconsistencia**$_m$ **o inconsistencia desde el punto de vista metalingüístico en C**;

$|\!-\!\!-$ A & $|\!-\!\!-$ ~A se denomina **inconsistencia$_m$ en M**.

DEF. 2: Sea S̲ un sistema formal de cálculo sentencial o de predicados de primer orden[7] y sea A una fórmula de S̲.

i) S̲ es **~-consistente$_l$** sii $\neg(\exists A)[\ |\!-\!\!-_{\underline{S}}{\sim}A \wedge A]$.

ii) S̲ es **~-consistente$_m$** sii $\neg(\exists A)[\ |\!-\!\!-_{\underline{S}}{\sim}A\ \&\ |\!-\!\!-_{\underline{S}}A]$.

DEF. 3: Una **valoración** o **función de asignación** de M es una función v:Γ " {1, 0} tal que:

i) $v(A) \neq v({\sim}A)$,

ii) $v(AxB) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 0\ \&\ v(B) = 1$.

Demostraremos ahora que siendo M un sistema inconsistente$_l$, es consistente$_m$, lo cual permite emplear los métodos clásicos al demostrar el (meta)teorema de completitud para él.

LEMA 1: a) (B1)-(B3) son inconsistentes$_l$ en M.

b) La regla de inferencia de M (la cual en lo sucesivo llamaremos "regla x") preserva la inconsistencia$_l$.

c) "A∈Γ($|\!-\!\!-$ A x A). (Transform-C: $|\!-\!\!-$ ~A ∧ A).

Demostración de (a): Demostraremos lo siguiente:

A, AxB son inconsistentes$_l$ en M ⇒ B es inconsistente$_l$ en M.

(1) Supongamos que para toda v, v(A) = 0 y v(AxB) = 0.

(2) Supongamos que existe alguna valoración v tal que v(B) = 1.

(3) v(A) = 0 & v(B) = 1 ⇒ v(AxB) = 1, por (ii) de la definición anterior, pero v(AxB) = 0 por (1), luego no existe ninguna v tal que v(B) = 1, por tanto, v(B) = 0 para toda v. En consecuencia, B es una inconsistencia$_l$. La regla x preserva, pues, la inconsistencia$_l$. Q.E.D.

La demostraciones de (b) y (c) nos brindan sencillos y claros ejemplos de la necesidad de suponer, para poder usar los métodos clási-

[7] Cuyo conjunto de conectivas sea expresable en C mediante {~,∧}.

cos, la consistencia$_m$, para demostrar que M es completo (todo teorema es inconsistente$_l$).

Demostración de (c): Demostraremos que ∇A(|— AxA).

(1) |— (A x ((AxA) x A)) x (((A x (AxA)) x (AxA)) Instancia de (B2)

(2) |— A x ((AxA) x A) Instancia de (B1)

(3) |— (A x (AxA)) x (AxA) 1,2 Regla x

(4) |— A x (AxA) Instancia de (B1)

(5) |— AxA 3,4 Regla x.

Q.E.D.

El transform-C de |— A x A es |—~A $\wedge$ A, luego M es inconsistente. Pero nótese que **no** es demostrable ~(AxA), i.e. $\neg$(|— ~AxA), luego M es **no trivial y absolutamente consistente** en sentido clásico.

TEOREMA DE CORRECCION: todo teorema de M es inconsistente$_l$ en M, i.e. |— A Þ A es una inconsistencia$_l$ en M.

Demostración: véase lema 1.

TEOREMA DE LA DEDUCCION: $\Delta \subseteq \Gamma$, A |— B $\Rightarrow$ Δ |— AxB.

La demostración se lleva a cabo exactamente de la manera clásica (ver Mendelson [1979], pp. 32-3) sustituyendo a |— A $\supset$ B por |— A x B y aplicando la regla x en lugar del modus ponens. (Por supuesto, al aplicar inducción sobre el número de fórmulas que aparecen en la deducción de B a partir de $\Delta \cup \{A\}$ se emplea la versión metalingüística del principio de no-contradicción, i.e. se respeta la consistencia$_m$).

TEOREMA DE COMPLETITUD: A es una inconsistencia$_l$ en M $\Rightarrow$ |— A, i.e. si A es una fórmula inconsistente$_l$ de M, entonces A es un teorema de M. (La demostración se lleva a cabo como en Mendelson [1979], pp. 33-7, con las adaptaciones mencionadas).

Ahora volvamos a la argumentación de Quine [1970]. Si toda divergencia es debida a un cambio de significado (tal como se desprende de (M)-(A/D)), entonces la divergencia aparente sólo puede deberse, cuando no hay cambio de significado, a un mero cambio de notación. Ejemplo: "*Suppose someone were to propound a heterodox logic in which all the laws which have up to now been taken to govern alternation were made to govern conjunction instead, and vice versa. Clearly we would regard his desviation merely as notational and phonetic. For obscure reasons, if any, he has taken to writing 'and' in place of 'or' and vice versa. We impute our orthodox logic to him, or impose it upon him, by traslating his deviant dialect.*" No obstante, M es un sistema en el cual para toda fórmula clásica existe su correpondiente trasform-M inconsistente$_1$ e, igualmente, para toda fórmula inconsistente$_1$ de M existe su correspondiente transform-C clásico que es consistente$_1$. Pero **no** se trata de una mera variante notacional pues el resultado es un sistema en el que **todas** sus fórmulas son inconsistentes$_1$ pero **no** cualquier fórmula es demostrable en él. Se trata, pues, de un caso de divergencia respecto a una ley fundamental de la lógica clásica que no está acompañada de un cambio de significado de algún modo perceptible, pues, ¿acaso tiene sentido decir que hay un cambio de significado al abreviar $\sim A \wedge B$ como $A \times B$ y obtener los resultados expuestos? (recuérdese la hipótesis de la pág. 6).

Pero ¿Quine considera explícitamente la posibilidad de usar un sistema lógico inconsistente sin, a la vez, considerar como verdaderas a las fórmulas de dicho sistema? En efecto, lo hace para reducir inmediatamente esa posibilidad a un caso de divergencia aparente: "*consider the familiar remark that even the most audacious system-builder is bound by the law of contradiction. How is he really bound? If he were to accept contradiction, he would so readjust his logical laws as to insure distinctions of some sort; for the classical laws yielded all sentences as consequences of any contradiction.*" (Quine [1979], p. 59). Nótese que Quine plantea la divergencia a nivel de los teoremas admitidos, pero como M es un sistema **dual** de C no se requiere ese reajuste en la traducción de los teoremas clásicos a M. Pero entonces el *status* de la idea clásica —explícitamente formulada por Duns Scoto— según la cual de un contradicción se sigue cualquier fórmula parece problemático en M pues, como hemos visto, todas sus fórmulas son contradictorias y, no obstante, no todas las fórmulas de M son teoremas. ¿Cómo aclarar esto? Es sencillo: debemos distinguir entre esa idea formulada como

ley o **teorema** a nivel del **lenguaje-objeto** y la misma formulada como **regla de inferencia** (derivada) **a nivel metalingüístico** —distinción cabalmente entendida por la brillante tortuga de Lewis Carroll—; como teorema esa idea aparece en M formulada así: |— ~(AxA) x B (transform-M de ~A ∧ A ⊃ B). Pero como regla de inferencia, se formularía así: ~A, A |— B o tal vez AxA |— B. Pero, por el teorema de la deducción, se obten*dría* |— (AxA)x B que **no** es una fórmula inconsistente$_I$ y está *ipso facto* excluida de M. De allí que la conclusión que trivializa la divergencia ("*but then we would proceed to reconstrue his heroically novel logic as a non-contradictory logic, perhaps even as familiar logic, in perverse notation.*" (*ibíd.*)) no es válida (constituye un *non sequitur*, como hemos visto).

Por otra parte, en M el terreno queda lo suficientemente firme como para dar un pleno y estable significado a x aún después de producirse el cambio en los valores veritativos, o dicho en forma más explícita: el significado de x es el proporcionado por '~' y '∧' con sus significados clásicos y el resultado es que todos sus teoremas son inconsistentes (y si son consideradas semánticamente son fórmulas falsas para toda asignación de valores veritativos según la definición (semántica) clásica de contradicción. Pero esto **no** se lleva acabo **en M** sino en el metalenguaje que usamos para hablar **sobre** M). Así pues, por el teorema de completitud para C y M, el cambio de valor veritativo de cada fórmula de C al ser traducida a M (y viceversa) y la violación expresa del principio de no-contradicción a nivel del lenguaje-objeto de M no implica, de ningún modo, una "dislocación amplia y devastadora de los valores veritativos de los contextos de las conectivas ~ y ∧" de tal modo que no quede terreno firme en el cual apoyarse para determinar el uso de esas conectivas.

Más aún, en vista que 'x' es meramente un abreviatura conveniente, puede proporcionarse un criterio semántico conductual (bivalente) para ella al estilo de los criterios que se establecen en Quine [1960] para ~, ∧ y ∨: "La conectiva 'x' aplicada a dos sentencias produce una sentencia compuesta tal que uno está dispuesto a asentir si y sólo si uno está dispuesto a asentir al segundo componente y no asentir al primero; o también si uno está dispuesto a disentir del primer componente y asentir al segundo". Sin embargo, esto **no implica** afirmar que "...*certain natives* [o, en nuestro caso, lógicos inconsistentes$_I$] *are said to* ***accept as true*** *certain sentences translatable in the form 'p and not p'*" [8], pues el teorema de

[8] Quine [1960], p. 58 (subrayado mío).

completitud para M dice que cada teorema de M es un inconsistencia, pero **no dice** que cada teorema de M es una fórmula verdadera (en una interpretación) o lógicamente válida (verdadera en toda interpretación). Este teorema de ningún modo establece que alguna inconsistencia es verdadera; tan sólo establece que todo teorema de M es inconsistente. De allí nuestra afirmación entre paréntesis en el párrafo anterior según la cual todos los teoremas de M pueden considerarse, desde el metalenguaje, como fórmulas falsas, pero esto no es lo afirmado por el teorema (en rigor, metateorema) de completitud.

En conclusión, sí son posibles divergencias genuinas en lógica sin que aparezcan acompañadas de cambios de significado de los símbolos lógicos.

4. El sistema N

Para reforzar los resultados examinados revisaremos brevemente el sistema N que es una extensión de M la cual incluye el cuantificador existencial (Ex_i) —para i∈N— como cuantificador primitivo ('A^j_i' indicará la j-ésima letra predicativa i-aria de N). La nueva regla de inferencia es la siguiente:

REGLA DE INSTANCIACION (RI): si |— A, entonces $(Ex_i)A$.

ESQUEMAS DE AXIOMAS ADICIONALES:

(B4) |— $(Ex_i)(A(x_i)$ x $A(t))$, donde t es un término de M libre para x_i en $A(x_i)$.

(B5) |— $(Ex_i)(A$ x $B)$ x $(A$ x $(Ex_i)B)$, donde A no contiene ocurrencias libres de x_i.

La regla de transformación (R2) se reemplaza ahora por la siguiente:

(R2*) Sustitúyase $\sim(x_i)$ por $(Ex_i)\sim$.

LEMA 2: i) Si A es inconsistente$_1$, entonces |— A, es decir, toda fórmula de N que es una instancia de una inconsistencia$_1$ es un teorema de N (lo cual es demostrable usando sólo (B1)-(B3) y la regla x).

ii) N es consistente$_m$.

Demostración de (ii): Para cada fórmula A de N, sea g(A) la expresión obtenida eliminando todos los cuantificadores y términos de A (ejemplo: $g((Ex_1)A^2_1(x_1, x_2) \times A^1_1(x_3)) = A^2_1 \times A^1_1$).

g(A) es, entonces, una forma sentencial con los símbolos A^j_i empleados como variables sentenciales. Tenemos, entonces:

$g(\sim A) = \sim g(a)$ y $g(A \times B) = g(A) \times g(B)$, luego

$g((B4)) = A \times A$ y $g((B5)) = (A \times B) \times (A \times B)$,
que son inconsistencias$_l$ en M. Como $g((Ex_i)A = g(A)$ y la regla x preserva la inconsistencia$_l$, entonces si |— A, g(A) es una inconsistencia$_l$. Pero, si g(A) es una inconsistencia$_l$, entonces |— g(A). ¿Por qué? Si existe una fórmula B de N tal que |— B y |— ~B, entonces g(B) y g(~B) serán ambas contradicciones, lo cual es imposible por la cláusula (i) de la definición 3. Luego, no existe ninguna fórmula B de N tal que |— B & |— ~B, por tanto, N es consistente$_m$. Q.E.D.

TEOREMA DE LA DEDUCCION PARA N: Sea $\Delta \subseteq \Gamma = \{x/x$ es una fórmula de N$\}$.

(Δ, A |— B donde la deducción no contiene una aplicación de (RI) que involucra una variable que aparezca libre en A) Þ Δ |— A x B.

COROLARIO: (A es cerrada & Δ, A |— B) $\Rightarrow$ Δ |— A x B.

(Las demostraciones son las mismas que en Mendelson [1979], pp. 63-4 con las adaptaciones mencionadas).

Para demostrar el teorema de completitud para N a la manera clásica debemos definir la funciones semánticas de satisfacción e interpretación para N del modo clásico. Si se hacen los cambios obvios y se define la noción de **antimodelo** de un conjunto Δ de fórmulas de N como una interpretación I de N en la cual ninguna sucesión en Σ satisface a ninguna de las fórmulas que pertenecen a Δ, i.e. **cada fórmula de D es falsa respecto a I** (S denota el conjunto de sucesiones numerables de elementos del dominio de I), entonces puede demostrarse el siguiente dual del **lema de Lindenbaum**: si N es consistente$_m$, entonces existe una extensión consistente$_m$ y completa de N, y también puede demostrarse que N tiene un antimodelo numerable[9]. Esto implica que el costo de esta divergencia no-trivial de la ley de Duns Scoto y del principio de no-contradicción es la falsedad, clásicamente hablando, de **todas** las fórmulas del sistema. Así, salvo que se construya una semántica diferente (¿divergente?) mediante la cual se les proporcionen nuevos significados a ~, x, (Ex), = y <N, 0, ', +,. > (con lo cual estamos evidentemente "cambiando de tema"), estamos obligados a obtener un conjunto de transforms-N que violan las fórmulas más elementales de la teoría de la igualdad y la aritmética elemental tales como $|\!-\, 0 = x_1'$, $|\!-\, x_1 + 0\ {}^1 x_1$ ó incluso $|\!-\, (z=y)x(y=z)$ (es decir, $|\!-\, z=y \wedge y \neq z$). Aquí la divergencia es tan radical que las aplicaciones se reducen. En constraste, sistemas que **amplían** los alcances de la lógica clásica no presentan ese tipo radical de divergencia y su aplicabilidad en matemática y ciencia es más fructífera. Ejemplos ilustrativos de este caso es la lógica modal y la lógica difusa o borrosa (*fuzzy*); en ambas se obtienen todos los teoremas de la lógica clásica como un caso particular.

Apartando los tecnicismos, la **actitud** general que parece guiar algunos intentos de aplicar la lógica paraconsistente en teorías físicas puede ilustrarse con observaciones como las siguientes: "*Whenever we have a well-motivated, interesting theory which happens to be inconsistent we may reluctant to just drop it, particularly if we feel that its being inconsistent is not so bad in itself (...) were it not for the ensuing triviality. This is e.g. the case with (...) naïve set theory. In such circumstances, we may think of getting rid of this kind of trouble by* ***regarding*** *the theory's underlying logic as some form of paraconsistent logic.*" (da Costa y Marconi [1989], p. 22). Además de la teoría de conjuntos cita, como aplicación, la interpretación de Everett-Wheeler de la mecánica cuántica y cierta interpretación de la formulación original del cálculo diferencial (sujeta a las críticas de Berkeley).

En las afirmaciones mencionadas parece sugerirse que en aquellos periodos en los cuales varias teorías que han evolucionado considerablemente ha sido formuladas de manera inconsistente pueden estudiarse empleando una lógica paraconsistente como lógica subyacente, y no meramente rechazar tales formulaciones como inadecuadas. Si bien este enfoque puede ser fructífero, también cabe contrastar la perspectiva que diversos autores pueden tener

[9] La extensión $S\infty$ de N obtenida incluyendo como axiomas todas las fórmulas de la forma (Ex_m)~$Fk(x_m)$ x ~$Fk(b_k)$ -donde bjk es una constante- es consistente$_m$. La demostración, como en el caso clásico, se hace por inducción sobre los Si suponiendo, por reducción al absurdo, que (|—A & (|—?~A en S_{n+1} (vid. Mendelson [1979], pp. 68-9).

de una misma teoría **simultáneamente**. Por ejemplo, es patente el contraste entre la percepción que tuvieron Kelvin y Clausius de la relación entre los experimentos de Joule y la teoría de Carnot. Mientras según el primero estos resultados contradicen la teoría de Carnot, lo cual obliga a abandonar el axioma fundamental de Carnot y a llevar a cabo una "*...entire reconstruction of the theory of heat from its foundation*" (Kelvin (1849]), según Clausius "*a careful examination shows that the new method does not stand in contradiction to the essential principle of Carnot, but only to the subsidiary statement* ***that no heat is lost***..." (Clausius [1950], p.102).

Y es notorio que la visión que tengamos de la transición entre la teoría del calórico y la teoría dinámica tendrá un aspecto de "crisis profunda" si se basa en la descripción de Kelvin (caso de Kuhn [1970]), en contraste con la descripción más precisa y "acumulativista" que puede elaborarse en base a los trabajos de Clausius y Reech (caso de Truesdell [1980])[10]. Formulada de manera harto simplificada, la situación es la siguiente: mientras en el caso de Kelvin los resultados de Joule **contradicen**, en sentido estricto, la teoría de Carnot, en Clausius la contradicción sólo surge con un aspecto accidental, secundario de la teoría; por tanto, ésta puede reformularse sin que aparezca tal contradicción (de hecho la perspectiva de Kelvin, mucho menos precisa que la de Clausius o Reech, es tomada casi acríticamente por Kuhn, mientras que Truesdell analiza muy críticamente sus contribuciones). Nótese que el contraste entre las actitudes de Kelvin y Clausius no se diferencia demasiado del mostrado por Frege y Zermelo frente a la paradoja de Russell. Estos ejemplos muestran que la aplicación de un sistema paraconsistente a la reconstrucción de un período histórico en la evolución de una teoría científica depende del rol que se le otorga a una fuente histórica en particular. Y quizás en la mayoría de los casos sea posible justificar historiográficamente una visión "conservadora", según la cual las pretendidas contradicciones sólo representan una porción de las opiniones sustentadas por la comunidad científica en aquel momento, y ellas, o son subsumidas por una teoría más general o sólo aparecen en una formulación defectuosa o demasiado restringida.

Por supuesto, este es un problema importante pero no puede generalizarse incondicionalmente ni presenta una objeción de prin-

[10] Véase la nota 4. Una reconstrucción conjuntista de la teoría calorimétrica que subyace a la teoría de Carnot (basada en la axiomática de Truesdell-Bharatha) puede encontrarse en Zerpa [1994], pp. 177-193).

cipio. En todo caso, independientemente de los problemas que presenta la aplicación de los sistemas paraconsistentes a teorías científicas, el análisis de estos sistemas es, indudablemente, de gran utilidad para considerar la posibilidad de divergencias genuinas no acompañadas de cambios de significado respecto a la lógica clásica. Naturalmente, en el caso que examinamos, las razones pragmáticas y las razones metodológicas de simplicidad y fecundidad nos llevan a abstenernos de emplear a N como un rival de la lógica clásica; pero, en cualquier caso, la divergencia es no-trivial y no hay razones de principio contra ella.

Llegados a este punto, cabría preguntarse si puede emplearse sistemas paraconsistentes más débiles que M y N los cuales sí sean fecundos en aplicaciones no triviales. E inmediatamente surge la pregunta sobre si en esos sistemas hay (explícito o encubierto) un cambio de significado en las conectivas como el denunciado por Quine. Dicho de otro modo: ¿un cambio de lógica de tal modo que se obtenga un sistema fecundo (apto para aplicaciones) implica siempre un cambio de tema, i.e. un cambio (explícito o encubierto) en el significado de los símbolos lógicos? En la próxima sección mostraremos que la respuesta parece también dar la razón aquí a las consideraciones pragmáticas mencionadas.

5. Cambios de significado explícitos

Al examinar una muestra representativa de los sistemas de lógica paraconsistente, se observa que en muchos de ellos los cambios de significado son explícitos: es frecuente encontrar en el *stock* de símbolos lógicos conectivas clásicas y conectivas no-clásicas, i.e. conectivas que (según los autores) preservan los significados clásicos y conectivas que los varían explícitamente. Por ejemplo, el alfabeto del sistema V3 de Arruda [1977] basado en las ideas heterodoxas de Vasiliev[11] está compuesto por las conectivas $\supset$, $\wedge$, $\vee$, $\sim$, $.$, $-$[12] donde las cuatro primeras conservan los significados clásicos de la implicación, conjunción, disyunción y negación, mientras que $.$ y $-$ constituyen la conjunción no-clásica (*non-classical conjunction*) y la negación no-clásica (*non-classical negation*) respec-

[11] Una exposición intuitiva de las ideas de Vasiliev pueden encontrarse en Arruda [1977], pp. 3-5 y 19-21. Tiene particular interés lo siguiente: *"Vasilev distinguished the law of [non-contradiction (...) which he took in the Kantian form: 'no object can have a predicate which contradicts it' (...) from the LAW OF NON-SELF-CONTRADICTION: 'one and the same judgement cannot be simultaneously true and false'."* (Comey, J.S.L., vol. 30 (1965), citado en Arruda [1977], p. 4).

[12] Por conveniencia tipográfica hemos cambiado ligeramente la notación empleada por Arruda.

tivamente. El cambio de significado operado mediante estas nuevas conectivas se pone de manifiesto al considerar los valores que toma la función de valoración aplicada a una fórmula atómica —la cual se define del modo usual— o a una fórmula molecular construida a partir de esas conectivas:

$$v(Q) = 1 \Leftrightarrow v(Q) = v(Q.-Q) = 0,$$
$$v(-Q) = 1 \Leftrightarrow v(Q) = v(Q.-Q) = 0,$$
$$v(Q.-Q) = 1 \Leftrightarrow v(Q) = v(-Q) = 0.$$

Esto permite obtener como teorema, entre otros, una "ley de cuarto excluido" que se formula usando ambos tipos de conectivas así:

$$-Q \vee Q \vee (Q.-Q),$$

lo cual constituye un *explicatum* (en sentido carnapiano) de ciertas ideas de Vasiliev. Pero es claro que el cambio de significado no tiene por qué aparecer solamente a nivel de las conectivas: el alfabeto del sistema V1 (vid. Arruda [1977], §2) incluye además de las variables sentenciales clásicas un conjunto S de "variables sentenciales de Vasiliev" tal que en S no son válidas reglas clásicas como la de eliminación débil de ~ o la ley de doble negación (formulada para ~). Si PÎS entonces

$$v(\sim P) = 0 \Rightarrow v(P) = 1,$$
$$v(\sim\sim P) = 1 \Rightarrow v(P) = 1 \text{ y}$$
$$v(\sim(P \wedge \sim P)) = 0 \Leftrightarrow v(P) = v(\sim P) = 1.$$

No obstante, no siempre los cambios de significado son tan explícitos. Por ejemplo, respecto a los sistemas C_i (1 £ i £ w) de da Costa se afirma explícitamente que las conectivas "*...possess all classical properties...*" (da Costa y Marconi [1989], p. 8), lo cual es bastante plausible pues esos cálculos fueron elaborados precisamente incluyendo como axiomas las leyes más importantes de la lógica clásica compatibles con las siguientes condiciones:

a) En el lenguaje-objeto el principio de no-contradicción no es válido en general, i.e. $\neg \vdash \sim(A \wedge \sim A)$ (aunque los sistemas C_i sí son consistentes$_m$ pues no existe ninguna fórmula A tal que $\vdash A \& \neg \vdash A$);

b) La regla de eliminación débil de la ~ no es válida en general (de A y ~A no puede derivarse cualquier fórmula B).

Pero si bien en esos sistemas el principio de no-contradicción, en la versión que acabamos de formular, no es teorema, esto no quiere decir que en el sistema aparezcan explícitamente inconsistencias$_1$. Más aún, y como señala acertadamente Bunder, "*most paraconsistent logics are open to inconsistency but only few contain any statements that are actually inconsistent.*" (Bunder [1989], p. 57). Por ejemplo, en C_w son demostrables fórmulas donde aparecen inconsistencias$_1$ **sólo en contexto**, por ejemplo, como consecuentes en un condicional, a saber, $\vdash_{Cw} \sim A^n \supset A \wedge \sim A$, donde

$A^1 = \sim(A \wedge \sim A)$ y
$A^{n+1} = (A^n)^1$.

Por otro lado, ni aún cuando se consideran aplicaciones, el lógico paraconsistente que emplea alguno de los sistemas C o alguna extensión se ve **forzado** a admitir que alguna fórmula inconsistente$_1$ es verdadera (definiendo 'verdad' mediante la función de satisfacción, como es usual). De allí que sea un tanto difícil detectar el cambio de significado en estos sistemas y, no obstante, divergen de los clásicos de un modo expreso. En cualquier caso, la determinación de la presencia o ausencia de cambio de significado es mucho más indirecta que en V3 o M.

6. El sistema N y la validez de los silogismos en los que figuran premisas contradictorias

Las consideraciones hechas a propósito de los sistemas M y N proporcionan una aproximación bastante natural a un conocido y difícil pasaje de los *Analíticos Posteriores*, a saber, A11, 77a 10-22. Según Lukasiewicz [1971], el análisis del principio de no-contradición en el libro G de la *Metafísica* no implica que no puedan construirse silogismos **válidos** (no verdaderos según la teoría de la verdad por correspondencia que defiende) que contengan premisas contradictorias. "*In particular the **principle of syllogism** is independent of the principle of contradiction. (...) According to Aristotle* [en el pasaje señalado] *this syllogism is valid (A = living creature, B = man, C = Callias):*

B is A (and not also not-A)
<u>C, which is not-C, is B and not-B</u>
C is A (and not also not-A).

*However, if a syllogism remains valid when the principle of contradiction doesn't, then the principle of the syllogism (and indeed the **dictum de omni et nullo**) is independent of the principle of contradiction.*" (Lukasiewicz [1971], p. 503-4). En efecto, el análisis del sistema N muestra que la construcción de un sistema no trivial de cálculo de predicados de 1° orden es independiente de la validez en él del principio de no-contradicción; más aún el teorema de completitud para N muestra que todo teorema de N es inconsistente$_1$ y, no obstante, los métodos demostrativos clásicos tienen plena vigencia en él.

REFERENCIAS

Arruda [1977]: A. I. Arruda, "On the Imaginary Logic of N. A. Vasilev" en A. I. Arruda, N. C. A. da Costa and R. Chuaqui (Eds.): *Non-classical Logics, Model Theory and Computability*, North-Holland, 1977, pp. 3-24.

Bunder [1989]: M. Bunder, "The Logic of Inconsistency" en *The Journal of Non-Classical Logic*, vol. 6, No. 1, 1989, pp. 57-62.

da Costa y Marconi [1989]: N. C. A. da Costa y D. Marconi, "An Overview of Paraconsistent Logic in the 80s" en *The Journal of Non-Classical Logic*, vol. 6, No. 1, 1989, pp. 5-32.

Haack [1977]: S. Haack, *Deviant Logic. Some philosophical issues*, Cambridge University Press, 1° reimpresión de la 1° edición (1974), Cambridge, 1977.

Haack [1982]: S. Haack, *Filosofía de las Lógicas*, Ediciones Cátedra, Madrid, 1982 (edic. original: *Philosophy of Logics*, Cambridge University Press, 1978).

Hintikka [1976]: J. Hintikka, "Criterios conductistas de traducción radical: comentario sobre *Palabra y Objeto* de W. V. Quine" en *Lógica, Juegos de Lenguaje e Información. Temas kantianos de Filosofía de la Lógica*, Tecnos, Madrid, 1976, pp. 103-119.

Kuhn [1970]: T. S. Kuhn, *The Structure of Scientific Revolutions*, 2° edic. revisada, The University of Chicago Press, Chicago, 1970.

Kuhn [1989]: T. S. Kuhn, "Conmensurabilidad, comparabilidad y comunicabilidad" en *¿Qué son las revoluciones científicas? y otros ensayos*, Ed. Paidós/I.C.E. de la Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, 1989, pp. 95-135.

Lukasiewicz [1971]: J. Lukasiewicz, "On the Principle of Contradiction in Aristotle" en *The Review of Metaphysics*, vol. 24, No. 3, 1971, pp. 485-509.

Mendelson [1979]: *Introduction to Mathematical Logic*, 2° edición, Van Nostrand, New York, 1979.

Quine [1960]: W. V. O. Quine, *Word and Object*, The M.I.T. Press, onceava reimpresión de la primera edición (1960), Cambridge, Massachusetts, 1979.

Quine [1970]: W. V. O. Quine, *Philosophy of Logic*, Prentice-Hall, primera edición, Englewood Cliffs, New Jersey, 1970.

Truesdell [1980]: C. A. Truesdell, *The Tragicomical History of Thermodynamics 1822-1854*, Springer, Nueva York-Heidelberg-Berlín, 1980.

Zerpa [1994]: L. I. Zerpa Morloy, "Fundamentos lógicos de la calorimetría clásica" en *Apuntes Filosóficos*, No. 5, 1994, pp. 177-193.