José Javier Salas

Conociendo a π.
Una excusa para aprender

José Javier Salas[1]

Resumen

Durante varios años los estudiantes de las cátedras Matemáticas Generales y Cálculo I han desarrollado investigaciones sobre π y sus implicaciones en varias ramas del conocimiento científico como la física, la química y la historia de la matemáticas. Estas Investigaciones se han destinado a facilitar el acceso y comprensión de π como una constante universal, a partir de la experimentación como medio de descubrimiento y estudio, y han convertido a los profesores en espectadores de primer nivel y a los estudiantes, futuros profesores, en guías de un mundo diferente, nuevo, mágico y sobre todo accesible. Apoyados en la experimentación como forma de aprender matemáticas haciendo, aprender matemáticas construyendo.

Palabras Clave: Educación, matemáticas, experiencia docente, π, didáctica de las matemáticas, historia de las matemáticas

1 Licenciado en Educación, Mención Física y Matemática (UCAB). Magíster en Matemática (Universidad Simón Bolívar). Profesor en la Escuela de Educación (UCAB). jjsalas@ucab.edu.ve

Recibido: junio de 2009 Aprobado: noviembre de 2010

Knowing π An excuse to learn

Abstract

For several years students of General Mathematics and Calculus have developed researches on π and its implications in several branches of scientific knowledge as physics, chemistry and history of mathematics. These investigations are intended to facilitate access and understanding on π as a universal constant, from the experiment as a means of discovery and study, and teachers have turned into first-level spectators and students, as future teachers, into guides in a different, new, magic and, above all accessible, world. Supported in the experimentation like form of learning mathematics making, to learn mathematics building

Key words: education, mathematics, teaching experience, π, teaching mathematics, history of mathematics.

 ISSN: 1856-9587

Las matemáticas son sin lugar a dudas un lenguaje, un idioma, con el cual interactuamos y nos relacionamos con el ambiente que nos rodea. Como cualquier idioma necesita de paciencia y dedicación para utilizarlo a cabalidad y comunicarnos eficientemente. Es un idioma con palabras nuevas, algunas las llamamos constantes, algunas pueden ser difíciles de describir como π o difíciles de leer como épsilon (□), más complicado aún, será interpretar su significado, sus implicaciones y su importancia.

El departamento de Física y Matemáticas de la Escuela de Educación de la Universidad Católica Andrés Bello ha creado laboratorios de idiomas, laboratorios de matemáticas; uno de estos laboratorios es "Conociendo a π". Una feria educativa en la cual los estudiantes de la carrera diseñan experimentos, experiencias, dictan charlas, desarrollan investigaciones sobre π, su importancia y su trascendencia. En la figura 1 se presenta una muestra del afiche diseñado para la edición 2009 de *Conociendo a π*.

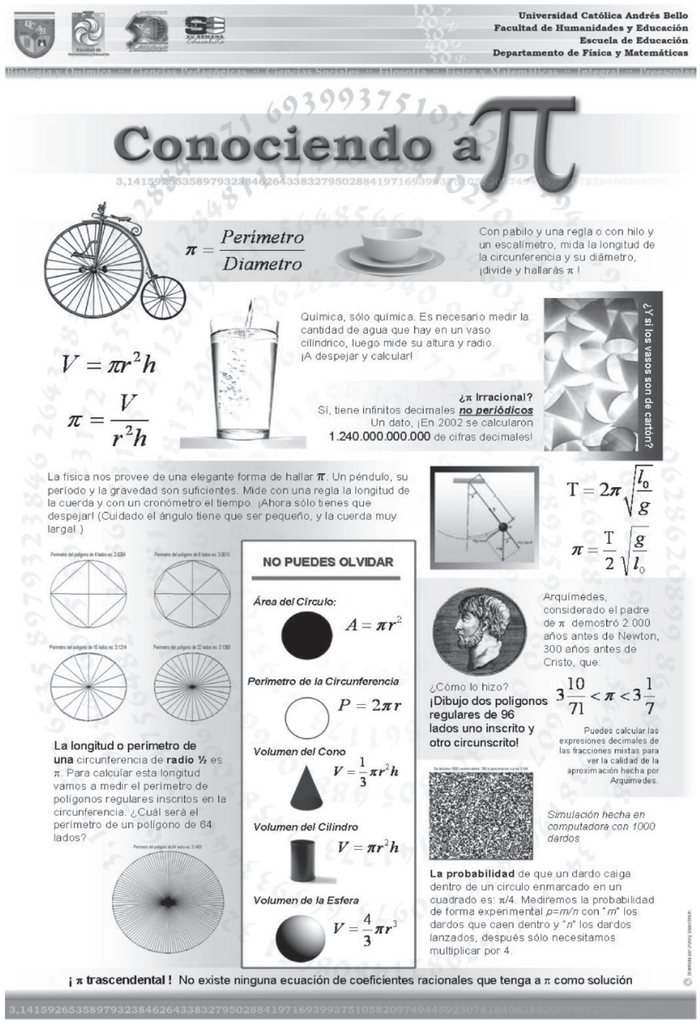


Fig.1 Conociendo a π, edición 2009.

En esta feria se demuestra cómo a través de la profundización, análisis de contenidos y la investigación histórica se crean espacios de aprendizaje, laboratorios de matemáticas, donde los estudiantes son los promotores del conocimiento y los profesores observadores de primer nivel.

A continuación, describiremos las relaciones de π con diversas áreas del conocimiento científico, entre ellas tenemos: geometría, estadística, física, probabilidad y la historia de las matemáticas. Así como es importante reconocer el vínculo entre π y diferentes áreas del conocimiento; es importante construir un medio para hacer accesible los significados e ideas involucrados de acuerdo al área y al público en general. Es una forma de llevar a tierra aquellos aspectos que parecen volar, alejándose del ciudadano común.

 ISSN: 1856-9587

Haremos en esta primera etapa un recuento histórico, precisar algunas ideas fundamentales.

π =3,14159265358979323846264338327950288419716939...

El uso definitivo de la letra griega π, para representar el cociente entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia, se atribuye a Leonhard Euler, desde 1737 adoptó y popularizó la notación planteada por William Jones en 1706 en su trabajo: *Synopsis palmariorum matheseos*. Sin embargo los orígenes, implicaciones e intereses sobre este cociente se remontan 2000 años antes de Leonhard Euler, poco más de 200 años antes de Cristo, la época de Arquímedes de Siracusa:

Fig. 2: Arquímedes

Se reconoce a Arquímedes de Siracusa (287 a.C - 212 a.C.) como el padre de π, fue el primero en interesarse por el cociente $\frac{L}{D}$, con L la longitud de la circunferencia (perímetro) y D el diámetro de la misma.

Es natural acercarse, conocer a π a partir de su definición como cociente entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia:

$$\pi = \frac{L}{D}$$

Esta será nuestra primera forma de calcularlo: *midiendo diámetros y perímetros*. Aunque parece una tarea elemental, hacerlo con precisión implica grandes esfuerzos. Invitamos a tomar alguna circunferencia, medir su perímetro, su diámetro y realizar el cociente entre estas dos cantidades. Arquímedes logró, "encerrar" (acotar) π por dos números racionales:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

$$3{,}1408450704225 < \pi < 3{,}\overline{142857}$$

Para la época lograr acotar π por estas dos fracciones significó una avance importantísimo. Sólo es necesario observar el título de esta sección para verificar lo cerca que estaba Arquímedes de π. Lamentablemente la tarea es imposible, no existe ninguna fracción con numerador y denominador enteros que exprese todos los decimales de π de forma exacta, esto hace de π un número irracional. Al hacer un promedio entre ambas cotas obtenemos: $\frac{3123}{994} \approx 3.14185110663$ un valor que difiere de π en 0.008%. Bastante bueno si recordamos que estamos a casi 300 años antes de Cristo.

Ahora tomaremos algunas de las ideas de Arquímedes para aproximar a π e inventar en educación matemática.

Arquímedes - π - Aprendizaje de las matemáticas

Sobre el área del círculo:

El área de un círculo de radio r es igual al área de un triángulo rectángulo de catetos b y h, donde $b = 2\pi r$ (perímetro de la circunferencia) y $h = r$ (el radio de la circunferencia). Aunque no es tema de este trabajo la forma en que se demostró esta proposición es importante resaltar que se utilizó un razonamiento basado en la **reducción al absurdo**, demostrando que: si el área del círculo A_C, no es mayor ni menor que el área del triángulo A_T, entonces son iguales: $A_C = A_T$

 ISSN: 1856-9587

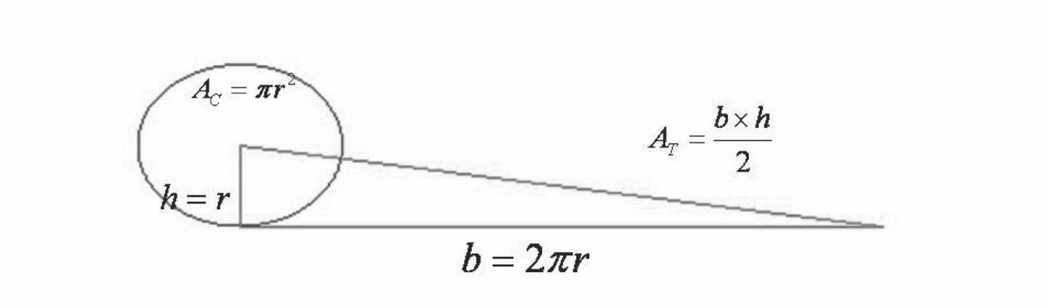


Fig. 3: Relación área del círculo con el área del triángulo

¿Cómo aprovechar esta idea?

Verificar la validez de este enunciado es muy sencillo, sólo necesitamos una balanza, construir un triángulo con las dimensiones antes señaladas y pesar ambas figuras geométricas. ¿Cómo relacionamos el área de una figura con su peso?

Medir el área del círculo (A_C) puede hacerse con gran precisión usando una balanza, para ello se recorta la circunferencia correspondiente y se mide su peso (P_C) . Ahora se recorta una figura geométrica conocida, por ejemplo un cuadrado, del que conocemos de forma exacta su área ($A_{\square}$) y tomamos su peso ($P_{\square}$), luego realizamos una relación de equivalencias:

$$\frac{A_C}{P_C} = \frac{A_{\square}}{P_{\square}}$$

luego un despeje nos conduce a:

$$A_C = P_C \frac{A_{\square}}{P_{\square}}$$

Ahora conocida el área del círculo $A = \pi r^2$ podemos despejar $\pi = \frac{A}{r^2}$ y con ambas cantidades calcular π.

Sobre el volumen del cilindro, cono y esfera:

Las siguientes son fórmulas muy conocidas: el volumen del cono: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde h es la altura del cono, r el radio del mismo.

El volumen de un cilindro $V = \pi r^2 h$ y el volumen de la esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ Resulta sumamente práctico, en primera instancia, relacionar el concepto de volumen con la cantidad de agua que un objeto es capaz de reservar, almacenar o desplazar. Luego necesitamos medir el volumen y las dimensiones del objeto que estemos considerando: cilindro, cono, esfera. A partir de éstos datos y despejes apropiados podemos hallar π.

$$\pi = \frac{3V}{r^2 h}$$

$$\pi = \frac{V}{r^2 h}$$

$$\pi = \frac{3V}{4r^3}$$

Es importante resaltar lo ‘’sensible” que es esta experiencia en cuanto a la medición del volumen V con el cilindro graduado, el radio r y la altura h con un vernier, son muchos los detalles que deben cuidarse.

Dependiendo del nivel que se desee explorar se puede realizar una prueba de la sensibilidad de este experimento para cada una de las variables V, r, h. Entendemos por *error* la diferencia entre el valor exacto o verdadero de una variable y el obtenido a través del uso de alguna técnica o instrumento.

Para el caso del cálculo de π usando volúmenes, el error cometido sobre el radio será mucho más determinante que el error cometido sobre la h o V. Es por ello que debe hacerse un esfuerzo en minimizar u optimizar las técnicas de medición del radio en particular.

Una sugerencia: para calcular el volumen de una esfera resulta más práctico calcular el volumen de 10 o 20 esferas juntas todas iguales o casi iguales ya que trabajar con promedios “diluye” los errores. Si colocamos las 10 o 20 esferas dentro de un cilindro graduado tendremos el volumen promedio

 ISSN: 1856-9587

desplazado por una de ellas, luego calculando un radio promedio, tendremos aproximaciones a radio y volumen, con mejores condiciones para calcular π .

Otra forma de medir el volumen es por desplazamiento de líquidos, principio enunciado por Arquímedes, como el Principio de Hidrostática. Investigar al respecto puede servir para discutir sobre las nociones de densidad, peso y volumen.

Fig. 4: Principio de Hidrostática

Polígonos por dentro y por fuera

Arquímedes pensó en aproximar el perímetro de la circunferencia usando Polígonos Regulares Inscritos y Circunscritos a la circunferencia. Entendemos por polígono regular inscrito al polígono cuyos vértices se encuentran sobre la circunferencia, mientras el polígono circunscrito es aquel cuyos lados son tangentes a la circunferencia, es decir los vértices están fuera del área del círculo.

En la figura 5 se presentan polígonos inscritos y circunscritos para 3, 6, 9 y 96 lados, es evidente como a medida que el número de lados del polígono regular crece, el perímetro de cada uno de ellos, inscrito y circunscrito se aproxima al perímetro de la circunferencia.

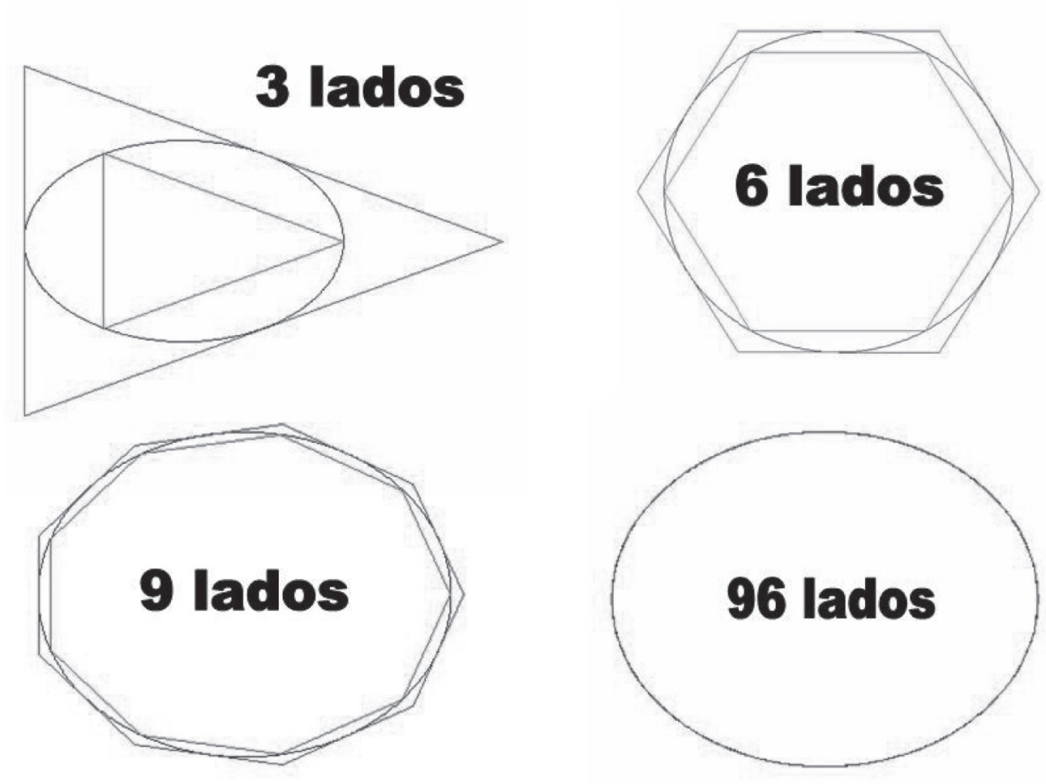


Fig. 5 Aproximación al perímetro de la circunferencia con polígonos.

Esta idea de aproximar el perímetro de la circunferencia con polígonos regulares puede ser construida y explicada sin mayores esfuerzos por los estudiantes desde 7° grado, ya que sólo necesitan tener algunas nociones geométricas para la construcción de los polígonos.

En el caso de la circunferencia de radio $r = \frac{1}{2}$, tenemos que su perímetro es $p = 2\pi \frac{1}{2} = \pi$. Así que inscribir y circunscribir polígonos regulares en una circunferencia de radio $r = \frac{1}{2}$, será un buen camino para aproximarnos a π.

A continuación presentamos las aproximaciones a π, aplicando este proceso de inscribir y circunscribir polígonos regulares, aunque puede hacerse con lápiz, papel, regla y compás, en esta oportunidad emplearemos un software de cálculo numérico MatLab para calcular con mayor precisión cada una de estos perímetros. Es importantísimo resaltar que el perímetro de un polígono

 ISSN: 1856-9587

regular se calcula multiplicando la cantidad de lados n por la longitud de cualquier lado l, es decir, $p = nl$

Lados	Inscrito	Circunscrito	Promedio
3	2,59807621	5,19615242	3,89711432
6	3	3,46410162	3,23205081
12	3,10582854	3,21539031	3,16060943
24	3,13262861	3,15965994	3,14614428
48	3,13935020	3,14608622	3,14271821
96	314103195	3,14271460	3,14187328

Aunque Arquímedes no alcanzó este nivel de precisión numérica en sus cuentas, dedujo un par de relaciones sobre el perímetro del polígono inscrito y circunscrito, que permitirían a partir de cualquier aproximación inicial (por ejemplo para $n = 3$) generar una sucesión de aproximaciones convergentes. Denotaremos por I_{2n} el perímetro del polígono inscrito de $2n$ lados y por C_{2n} el perímetro del polígono circunscrito de $2n$ lados:

$$C_{2n} = \frac{2I_nC_n}{C_n + I_n}$$

$$I_{2n} = \sqrt{I_nC_{2n}}$$

Las relaciones anteriores permiten calcular los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos de $2n$ lados (I_{2n} y C_{2n}), a partir de un polígono n lados, es decir, de la mitad de los lados. Vamos a comenzar por n=3 triángulos equiláteros inscritos y circunscritos, calculamos de forma exacta su perímetro. Aunque éstos triángulos no representan una buena aproximación al perímetro de la circunferencia, servirán como punto de partida para calcular $I_6, C_6, I_{12}, C_{12}, I_{24}, C_{24}, I_{48}, C_{48}, I_{96}\ y\ C_{96}$. Donde $I_{96}\ y\ C_{96}$ si son una buena aproximación al perímetro que buscamos, ver figura 5.

Resulta un ejercicio muy útil para los estudiantes de 1er. año del Ciclo Diversificado y Profesional, calcular I_3 y C_3 ya que son aplicaciones de trigonometría básicas, ver figura 6.

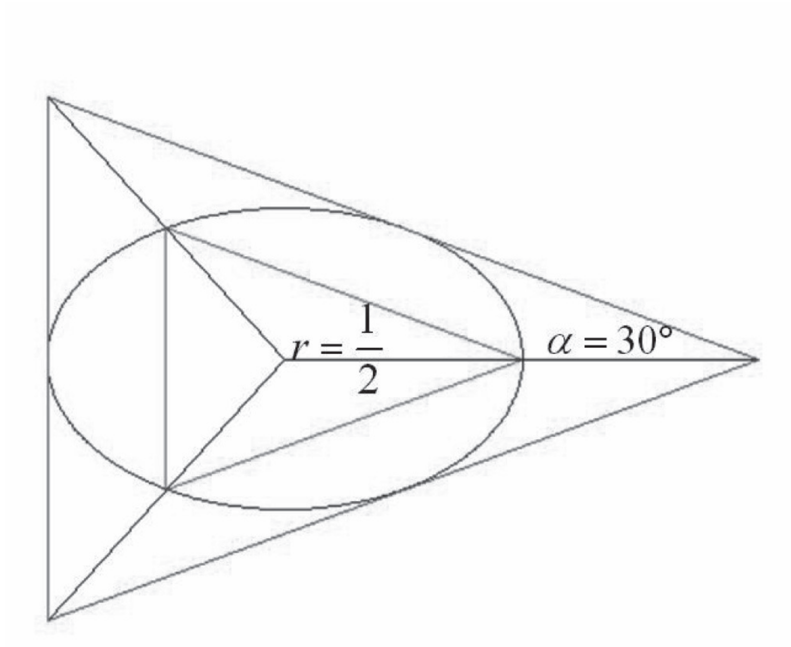
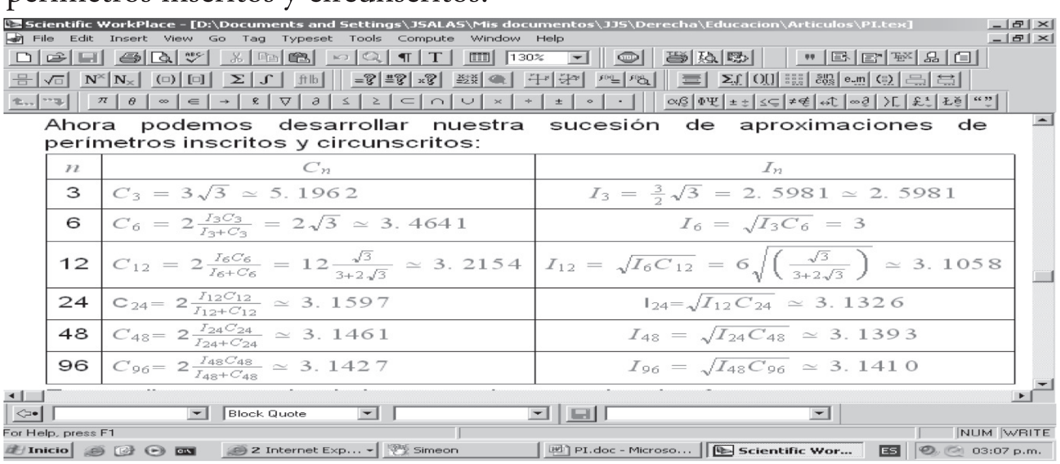


Fig. 6 Triángulos equiláteros inscrito y circunscrito

Ahora podemos desarrollar nuestra sucesión de aproximaciones de perímetros inscritos y circunscritos:



Ahora podemos desarrollar nuestra sucesión de aproximaciones de perímetros inscritos y circunscritos:

n	C_n	I_n
3	$C_3 = 3\sqrt{3} \simeq 5.1962$	$I_3 = \frac{3}{2}\sqrt{3} = 2.5981 \simeq 2.5981$
6	$C_6 = 2\frac{I_3C_3}{I_3+C_3} = 2\sqrt{3} \simeq 3.4641$	$I_6 = \sqrt{I_3C_6} = 3$
12	$C_{12} = 2\frac{I_6C_6}{I_6+C_6} = 12\frac{\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} \simeq 3.2154$	$I_{12} = \sqrt{I_6C_{12}} = 6\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}\right)} \simeq 3.1058$
24	$C_{24} = 2\frac{I_{12}C_{12}}{I_{12}+C_{12}} \simeq 3.1597$	$I_{24} = \sqrt{I_{12}C_{24}} \simeq 3.1326$
48	$C_{48} = 2\frac{I_{24}C_{24}}{I_{24}+C_{24}} \simeq 3.1461$	$I_{48} = \sqrt{I_{24}C_{48}} \simeq 3.1393$
96	$C_{96} = 2\frac{I_{48}C_{48}}{I_{48}+C_{48}} \simeq 3.1427$	$I_{96} = \sqrt{I_{48}C_{96}} \simeq 3.1410$

En aquellos casos donde las expresiones racionales fueron muy engorrosas sólo presentamos la aproximación numérica, la misma puede cotejarse con los resultados encontrados usando MalLab. Es necesario destacar que Arquímedes llegó "sólo" al caso $n = 96$, es decir 5 pasos a partir de $n = 3$, sin herramientas que le permitieran estimar las raíces cuadradas eficientemente. Todo esto resalta el arduo trabajo que implicó para Arquímedes calcular estas cinco iteraciones.

A partir de esta idea podemos explorar los siguientes temas: sucesiones, trigonometría, cálculo de áreas para polígonos regulares, área del círculo, entre otras.

A continuación presentamos resultados en el área de física y las matemáticas que permiten descubrir π usando un cronómetro.

El tiempo y π

Las siguientes dos experiencias muestran como la matemática, en particular π, está presente en situaciones de dominio público o general. Sólo necesitamos medir el tiempo de oscilación de un péndulo y el tiempo de caída por un arco de cicloide (arco de montaña rusa). En ambas experiencias necesitamos materiales de fácil acceso, reloj o cronómetro, regla y compás.

Péndulo simple

Una aplicación desde el área de la física está vinculada al tiempo que necesita un péndulo para completar una oscilación. Resulta un ejercicio muy práctico para los estudiantes de 1er año del Ciclo Diversificado y Profesional, calcular analíticamente el tiempo o período T.

Además, existen restricciones en este experimento que debemos explicar. La más importante de ellas es: sobre el ángulo de apertura de la cuerda con respecto a la vertical, este ángulo debe ser pequeño, no mayor a 5°. Es por ello que debemos utilizar una cuerda suficientemente grande para tener una oscilación adecuada.

La expresión para el período es: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

donde l es la longitud de la cuerda, g la constante de aceleración gravitatoria. Es decir, con sólo medir el tiempo y la longitud de la cuerda nos acercaremos de una forma más novedosa a

$$\pi = \frac{T}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Se presenta en la figura 7 un diagrama de fuerzas que permite calcular el periodo T analíticamente:

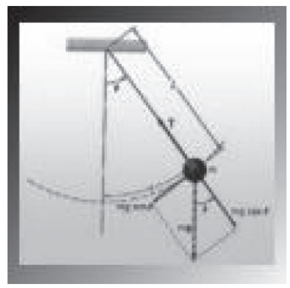


Fig. 7: Péndulo Simple

Cicloide

La cicloide es una curva plana que describe la trayectoria seguida por un punto de una circunferencia que gira sobre un plano

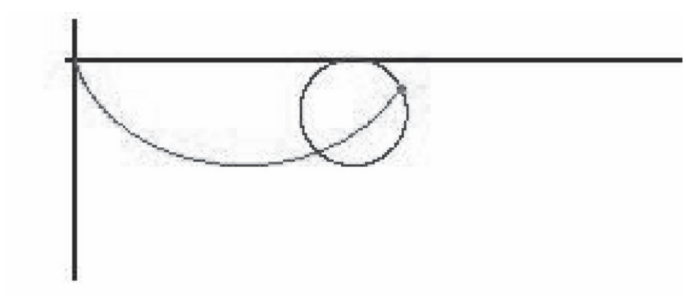


Fig. 8 Cicloide

Esta curva posee muchas características interesantes, se conoce como la braquistocrona o curva de descenso más rápido o de mínimo tiempo. También se le conoce como la tautocrona o curva de único tiempo, el tiempo que tarda en bajar una partícula por un arco de cicloide no depende del punto de partida. Por razones de extensión no discutiremos a profundidad sobre la cicloide, por ahora, sólo hemos provisto de una técnica para construirla: haga girar una circunferencia sobre una superficie plana como en la figura 8.

 ISSN: 1856-9587

Se mencionó cómo la cicloide cumple la condición de curva tautocrona, el tiempo que necesita una partícula en llegar al punto más bajo de la cicloide no depende del punto de partida, siempre es el mismo:

$$\pi = T\sqrt{\frac{r}{g}}$$

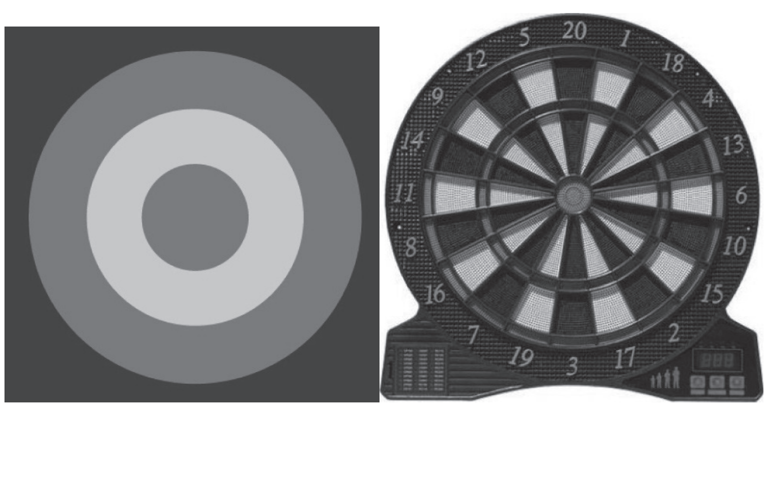
donde r es el radio de la circunferencia y g vuelve a ser la gravedad. Al despejar nos queda:

$$\pi = T\sqrt{\frac{g}{r}}$$

Evidentemente estos resultados están al alcance de cualquier profesor de física y matemáticas que, al omitir algunos detalles técnicos, puede diseñar una clase realmente novedosa para sus estudiantes de educación secundaria.

El azar y π

Para finalizar, expondremos una aplicación del azar al cálculo de áreas y de allí al cálculo de π . Si tenemos que lanzar dardos a una “diana” como las de la figura:



La probabilidad de dar en una zona en particular depende del área de la misma, a mayor área mayor probabilidad de acertar. Si ahora eliminamos el esfuerzo humano por dar en alguna zona en particular y planteamos esto como el evento lanzar un dardo al azar dentro de una "diana" más sencilla, como la figura 9:

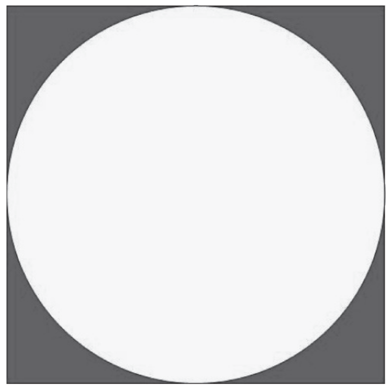


Fig. 9 "Diana"

La probabilidad de que un dardo este dentro del círculo es:

$$p = \frac{A_{\bigcirc}}{A_{\square}}$$

Donde $A_{\bigcirc}$ es el área del círculo y $A_{\square}$ es el área del cuadrado. Resultará un buen ejercicio para los estudiantes verificar que la probabilidad es: $p = \frac{\pi}{4}$ Ahora para poder despejar de esta fórmula necesitaremos una aproximación experimental de la probabilidad "p", la llamaremos "p_e", esta probabilidad experimental la obtendremos lanzando al azar, muchos dardos dentro de nuestra diana y contando cuántos caen dentro y cuántos fueron lanzados. En la medida en que el número de dardos sea mayor la probabilidad experimental "p_e" será una mejor representación de la probabilidad teórica "p".

$$p_e = \frac{dardos\ dentro}{dardos\ lanzados}$$

Ahora estamos en capacidad de hacer un despeje:

 ISSN: 1856-9587

$$\pi = 4\frac{dardos\ dentro}{dardos\ lanzados}$$

En la siguiente figura se realizó una simulación computarizada en MatLab: con 10.000 dardos lanzados, cada punto verde representa el punto de impacto. De los 10.000 lanzados cayeron 7863 dentro del círculo, esto provee la siguiente aproximación:

$$\pi \approx 4\frac{7863}{10000} = \frac{7863}{2500} = 3.1452$$

Más detalles pueden encontrarse leyendo sobre el Método de Monte Carlo.

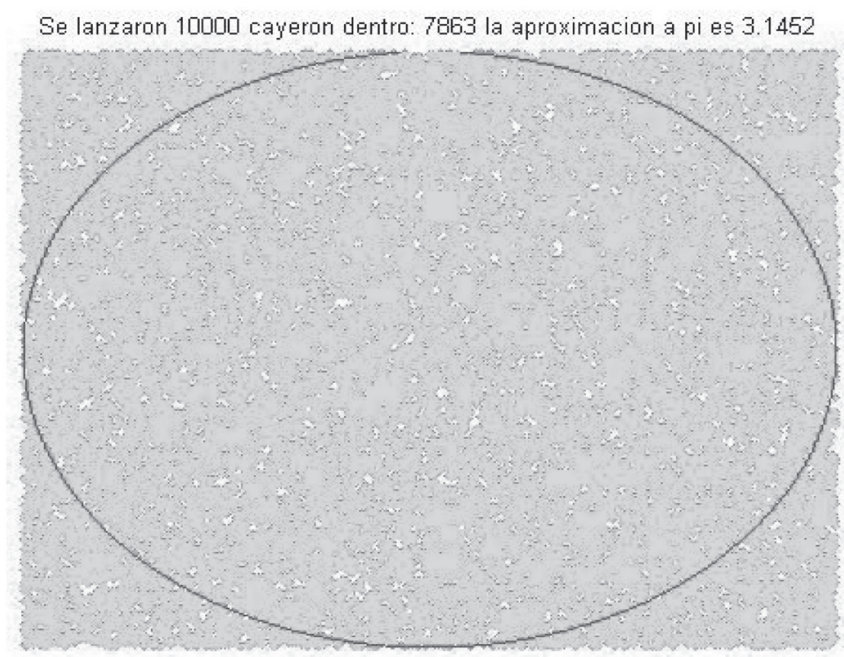


Fig. 10 Simulación en MatLab

A modo de conclusión

Cada una de las experiencias antes descritas se convierte en una estación o stand de la feria educativa Conociendo a π. Donde el protagonista principal no es π, son nuestros estudiantes explicando a grupos de alumnos de colegios, de la Universidad, invitados en general. ¿Cómo descubrir en matemáticas?, es más ¿cómo aprender matemáticas haciendo?, no en el cuaderno sacando cuentas, es ¡haciendo con las manos!, con instrumentos que normalmente no se utilizan en matemáticas sino en otras áreas, en otras cátedras. Ha sido un gusto didáctico y profesional escuchar, ver y presenciar la forma en que cada grupo de estudiantes desarrolla y defiende su stand, su visión de π, su visión de la educación en matemáticas.

Bibliografía

Boyer C., *A*. (1991). *History of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.

Dudley, U. (1993). *Readings for Calculus*. *5.* Washington: The Mathematical Association of America.

Hoffman J., Johnson C. y Logg A**.** (2004). *Dreams of calculus perspectives on mathematics education*. Berlín: Springer.

Houzel C. (1981). "¿Qué es el número?" *Mundo Científico*, (extra). *El universo de los números,* 6-10.

Jackson M. and Ramsay J. (1993). *Problems for student investigation*, *4.* Washington: The Mathematical Association of America.

Thomas G. (1956). *Cálculo infinitesimal y geometría analítica*. Massachussets: Addison Wesley Publishing Company.

ISSN: 1856-9587