EXPERIENCIAS
DOCENTES

María Belén García Sánchez,
José Ramón Gascón Márquez,
Francisco José Peraza Cabello

Curso de mecánica que integre las ideas de Newton, Lagrange y Hamilton

C

Curso de mecánica que integre las ideas de Newton, Lagrange y Hamilton

María Belén García Sánchez[1]
José Ramón Gascón Márquez[2]
Francisco José Peraza Cabello[3]

I. Introducción:

La primera gran síntesis del conocimiento físico la representa el trabajo de Newton (1642-1727) y sus leyes alrededor de 1663. En particular, su concepto de fuerza, expresado matemáticamente en la ecuación diferencial:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} ,$$

donde $\vec{p}$ es la cantidad de movimiento y $\vec{F}$ la Fuerza, permitía calcular la evolución de un sistema de partículas a partir de las condiciones iniciales. El éxito de tal representación fue extraordinario y se aplicó en diversos ámbitos desde el movimiento de una masa sometida a la acción de un resorte, hasta predecir la trayectoria de los planetas alrededor del sol.

Posteriormente, Euler (1707-1783) y Lagrange (1736-1813), a mediados del siglo XVIII, dieron una aproximación alterna a la Mecánica basada en el Principio de Mínima Acción. Este enfoque queda resumido en la ecuación de Euler-Lagrange de la mecánica:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) ,$$

1 Licenciada en Educación, Mención Física y Matemática (Universidad Católica Andrés Bello, 1992). Especialista en Sistemas de Información (UCAB, 1999) mariagar@ucab.edu.ve

2 Licenciado en Matemáticas (Universidad Central de Venezuela, 1987). Master of Science (Ohio State University, 1996). jgascon@ucab.edu.ve

3 Licenciado en Educación, Mención Física y Matemática (Universidad Católica Andrés Bello, 2000) fperaza@ucab.edu.ve

donde *L* es el Lagrangiano del sistema, *x* es la posición generalizada, y $\dot{x}$ es la velocidad. Desde un punto de vista matemático el trabajo de Euler y Lagrange significó una generalización del cálculo diferencial de Newton conocido como cálculo de variaciones.

Por último, en los años 1834 y 1835, Hamilton (1805-1865) introduce una nueva formulación de la Mecánica basada en la función de energía H o Hamiltoniano y en las ecuaciones que llevan su nombre:

$$\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

donde los vectores q y p representan la posición y momentos generalizados. Estos enfoques guardaban una relación profunda con el enfoque newtoniano, pero Hamilton demostró que su enfoque describía la óptica. Posteriormente, las ideas de Euler, Lagrange y Hamilton demostraron ser más convenientes para describir la mecánica cuántica y para entender el concepto de grupo de simetrías de un sistema físico y su relación con las leyes de conservación, tal como lo resume el Teorema de Noether (Hanc,J., Hancova, M., Tuleja, S., 2004).

Sin embargo, en la enseñanza de la Física, el enfoque newtoniano ha prevalecido a pesar de la mayor flexibilidad, posibilidad de generalización y comprensión de la naturaleza de las ideas de Euler, Lagrange y Hamilton. Pretendemos analizar las razones de esta inercia en el currículo de Física, así como describir un posible curso de Mecánica para pregrado basado en los conceptos de Energía y el Principio de Mínima Acción. Un grupo de físicos encabezados por Edwin Taylor(2004, 2006), Josef Hanc(2004, 2006) y John W. Norbury(1996) entre otros, han liderado un esfuerzo materializado en una serie de artículos (ver referencias), para la inclusión temprana en el currículo de estudio de los enfoques lagrangianos y hamiltonianos. Su propuesta incluye excluir el cálculo de variaciones y solo usar el Cálculo Diferencial e Integral. Ello hace que los enfoques de Lagrange-Euler y Hamilton sean accesibles para estudiantes universitarios de segundo año o incluso estudiantes de bachillerato que hayan visto Cálculo (*Norbury, 1996)*. Sin embargo, debemos señalar que en el tratado clásico de Física de Feymann, et al (1961) aparece, junto al

 ISSN: 1856-9587

enfoque newtoniano, la formulación de principios variacionales y se señala la importancia de la idea de simetría en Física. Otro ejemplo de un curso de pregrado de Mecánica (para estudiantes de la licenciatura de Matemática) que incluye los distintos enfoques es el texto de Ruggeri(1984).

Nosotros presentamos la estructura completa, basada en el enfoque por competencias, de un curso de Mecánica para los primeros semestres de las licenciaturas de Física o Educación mención Física. Además, describiremos cada uno de los enfoques de la Mecánica mostrando las relaciones matemáticas entre los mismos.

El plan de trabajo es el siguiente: en primer lugar describimos los enfoques de Newton, Euler-Lagrange y Hamilton mostrando ejemplos de distintos sistemas físicos muy sencillos; en segundo lugar, estudiamos las posibles razones para la prevalencia de las ideas de Newton en el currículo, discutiendo las posibles ventajas y desventajas de un curso de Física basado en las concepciones de Euler-Lagrange y Hamilton. Por último, describimos las competencias y una sinopsis de contenido de un curso de Mecánica de pregrado basado en las ideas lagrangianas y hamiltonianas.

II. Los distintos enfoques de la mecánica

Mecánica de Newton

Las ecuaciones de Newton han mantenido importancia a lo largo de la historia de la física y son la base de la mecánica clásica.

La segunda Ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, afirma que una partícula se mueve bajo una fuerza, de tal manera que el vector fuerza, para una determinada posición de la partícula en cualquier instante, es igual al vector aceleración multiplicado por la masa *m* de la partícula la cual se supone constante. Si $\vec{x}(t)$ denota el vector posición de la partícula en el tiempo *t*, donde *x:* $R^3 \rightarrow R^3$ es una curva diferenciable, entonces el vector aceleración $\vec{a}(t)$es la segunda derivada de *x(t)* con respecto al tiempo:

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{x}}(t)$$

Y la segunda Ley de Newton se expresaría:

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}(t)$$

Así obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden:

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{m}\vec{F}$$

Se define, en el caso conservativo, la energía potencial $U(\vec{x})$, como una función sólo de la posición:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

donde $-\vec{\nabla}U$ es el operador gradiente de la energía potencial y $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Por lo tanto, podemos reescribir la ecuación de Newton como:

$$-\vec{\nabla}U = m\ddot{\vec{x}}$$

Mecánica de Lagrange

La mecánica lagrangiana fue creada por el matemático italiano-francés Joseph Louis Lagrange nacido en Turín en el año de 1736. Es otra forma de visualizar la mecánica de los cuerpos de una manera más general y abstracta. Fue publicada en el año de 1788 en un tratado llamado "Mécanique analytique" (Mecánica Analítica). En esta obra, Lagrange extiende la idea del trabajo virtual propuesta por D'Alembert, y hace de él un principio fundamental, que combinado con el cálculo variacional deduce todas las ecuaciones de la Mecánica de cuerpos Sólidos y de los Fluidos. Lagrange no sólo fue un matemático excepcional, sino también un firme defensor del "Principio de Mínima Acción", transformó la mecánica en una rama del análisis matemático. Escribió en el Prefacio: "Uno no va a encontrar números en este trabajo. Los métodos que expongo no requieren instrucciones, ni argumentos geométricos o analíticos, sino sólo operaciones algebraicas, sujetas a un curso regular y uniforme… no va a encontrar ni un gráfico"

 ISSN: 1856-9587

Principio de Mínima Acción

En física existe un principio descubierto hace mucho tiempo por Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, filósofo, astrónomo y matemático francés que lo enunció en el año 1744. Específicamente planteó que: “La naturaleza es económica en todas sus acciones”, esto lo hizo inspirado en el “Principio de Fermat” el cual establece que la luz en condiciones de reflexión y refracción sigue el camino que hace que el tiempo sea el menor posible. Mediante un ejemplo de óptica, podemos explicar el principio de Fermat o también llamado “El principio de mínimo esfuerzo” de la siguiente manera: Supongamos que tenemos un haz de luz que va del punto A al punto B como se muestra en la Figura 1.

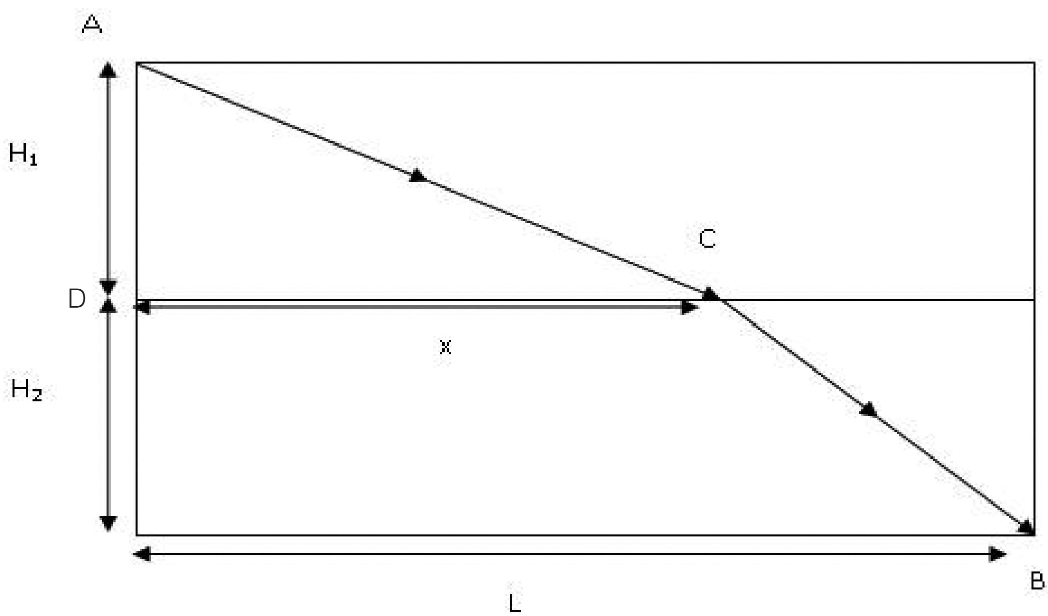


Figura 1

Según el principio de Fermat, el haz de luz seguirá la trayectoria que haga que el tiempo de A hacia B sea el mínimo posible, ahora, vamos a suponer que la luz viaja a rapidez uniforme en cada uno de los medios, en el medio 1 tiene una rapidez 1 (V_1) y cuando pasa al medio 2 tiene una rapidez 2 (V_2). C es el punto frontera entre los medios o punto de interfase y se encuentra a una distancia “x” del punto D. El tiempo que tarda la luz en ir de A hacia B es la suma del tiempo que tarda en ir de A hacia C (t_{AC}) más el tiempo que tarda de C hacia B (t_{CB}), estos tiempos, suponiendo rapidez uniforme, se pueden calcular como:

$$t_{AC} = \frac{AC}{V_1} = \frac{\sqrt{x^2 + H_1^2}}{V_1} \qquad \text{y} \qquad t_{CB} = \frac{CB}{V_2} = \frac{\sqrt{(L-x)^2 + H_2^2}}{V_2}$$

Ahora, el tiempo total es:

$$t(x) = t_{AC} + t_{CB} = \frac{\sqrt{x^2 + H_1^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2 + H_2^2}}{V_2}$$

De esta manera hemos construido la función del tiempo que debe ser mínima. Para saber el mínimo de esta ecuación utilizaremos la herramienta del cálculo diferencial. Sabemos que toda función que posee un mínimo o un máximo debe cumplir que su primera derivada sea igual a cero (Punto Extremal), si este es un mínimo debe cumplir también que su segunda derivada sea positiva. Con esta idea, se encuentra el punto extremal y con un cálculo sencillo se puede demostrar que efectivamente es un mínimo. Entonces:

$$\frac{dt(x)}{dx} = 0 \quad \text{(Punto extremal)}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\frac{\left(H_1^2 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{V_1}2x - \frac{1}{2}\frac{\left(H_2^2 + (L-x)^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{V_2}2\left(L-x\right)$$

Simplificando se obtiene que:

$$\frac{1}{V_1}\frac{x}{\sqrt{x^2 + H_1^2}} = \frac{1}{V_2}\frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + H_2^2}}$$

Esto es:

$$\frac{sen\theta_i}{V_1} = \frac{sen\theta_r}{V_2} \quad [1]$$

Donde: θ_i = ángulo de incidencia (es el ángulo que hace el rayo de luz con la normal en el medio)

 ISSN: 1856-9587

θ_r = ángulo de refracción (es el ángulo que hace el rayo de luz con la normal en el medio 2)

Nota: "La normal" es una recta imaginaria perpendicular a la línea de interfase entre los medios que pasa por el punto C (línea punteada en la figura 1).

La ecuación [1] se denomina en óptica "Ley de Snell", ley descubierta de manera empírica por Willebrord Snell Van Royen, matemático holandés (1580 – 1626). Luego, la Ley de Snell es derivada del Principio de Fermat.

De esta forma se demostró que la naturaleza siempre busca "el menor esfuerzo" que en este caso se traduce en "mínimo tiempo".

Basado en el principio de mínima acción, Lagrange demostró un enfoque distinto de entender la mecánica, que implica que el comportamiento de los sistemas dinámicos minimiza la "acción". Escrito de forma matemática:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} f(x, \dot{x})dt$$

donde *A* debe ser mínima y es denominada la acción. Para que esto sea posible es necesario que $f(x,\dot{x})$ (denominado el funcional) sea mínimo, esto se logra mediante cálculo variacional, Lagrange encontró la ecuación que debe cumplir el funcional para que se minimice la acción, esta es:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

Además, el funcional esta íntimamente relacionado con la energía, *L* es:

$$L = K - U$$

denominado "Lagrangiano del sistema", donde *K* es la energía cinética y *U* es la energía potencial.

Equivalencia entre la mecánica de Newton y la de Lagrange

Sea la ecuación: $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$ con $L = K - U$

Calculando $\frac{\partial}{\partial x}(K-U)=\frac{\partial}{\partial x}(-U)=F$

Por otro lado, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial U}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{d}{dt}mv$

Combinando estas dos ecuaciones, se obtiene que:

$$F=\frac{d}{dt}mv$$

La cual es la Segunda Ley de Newton.

Mecánica de Hamilton

Se describe la dinámica de un grupo de partículas de acuerdo a Hamilton. La descripción de la mecánica de Hamilton se basa en considerar un espacio $\Re^{2n}$ donde evolucionan, respecto al tiempo *t*, los vectores de momento $\vec{p}$ y $\vec{q}$ posición generalizados:

$$\vec{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_{n-1},p_n)$$
$$\vec{q}=(q_1,q_2,\ldots,q_{n-1},q_n)$$

Es decir, $(\vec{p}(t),\ \vec{q}(t))\in\Re^{2n}$para cualquier tiempo *t*. Uno introduce un funcional *H*: $\Re^{2n}\rightarrow\Re$ que a cada punto $(\vec{p},\vec{q})=(p_1,p_2,\ldots,p_{n-1},p_n,q_1,q_2,\ldots,q_n)$ del espacio $\Re^{2n}$ le asocia el número real $H(\vec{p},\vec{q})=H(p_1,p_2,\ldots,p_{n-1},p_n,q_1,q_2,\ldots,q_n)$. Dicho funcional *H* se interpreta como la energía del sistema.

La ecuación que gobierna el sistema, es de acuerdo a Hamilton, un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden dado por:

$$\begin{cases}\dfrac{dq_i}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\\[2ex]\dfrac{dp_i}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\end{cases}$$

donde i=1,2, ⋯, *n*.

La conservación del Hamiltoniano o de la Energía

Se demuestra que el Hamiltoniano de un sistema es constante en una trayectoria que satisface las ecuaciones de Hamilton. Esto puede ser interpretado como que la energía del sistema es constante cuando este evoluciona. Las Leyes de conservación son de gran importancia en Física ya que determinan las variedades donde pueden existir las posibles soluciones de un sistema. Una ley de conservación implica, por el Teorema de Noether, la presencia de un grupo de simetrías. Además, en el caso de sistemas con pocos grados de libertad pueden permitir determinar la evolución de los mismos.

Teorema: Si los vectores de momento $\vec{p}$ y posición $\vec{q}$ generalizados

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n)$$
$$\vec{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n)$$

evolucionan de a cuerdo a la ecuación de Hamilton $\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$, entonces el hamiltoniano $H(\vec{p}(t), \vec{q}(t)) = H(p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t), q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t))$ no depende de *t*.

Demostración:

Basta ver que $\dfrac{dH(\vec{p}(t), \vec{q}(t)}{dt} = 0$ Pero, aplicando la regla de la cadena, se tiene que:

$$\frac{dH(\vec{p}(t), \vec{q}(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} = 0$$

De donde se obtiene el resultado y se concluye la demostración.

Observación: Conocer las cantidades conservadas de un sistema Hamiltoniano es fundamental para determinar las trayectorias. Si el sistema tiene un grado de libertad, esto es *n=1*, el gradiente del Hamiltoniano debe ser perpendicular a la superficie de nivel *H=k*, lo que permite determinar la trayectoria.

Equivalencia entre la mecánica de Newton y la de Hamilton

En la mecánica de Newton la posición del sistema está dada por un vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Re^n$ y el tiempo t. Vamos a considerar el caso de una fuerza conservativa, $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ donde $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$es conocido como el potencial. La ecuación de Newton se lee, $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$ de donde:

$$m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}U$$

Se introduce la variable $\vec{p} = m\dot{\vec{x}}$, de donde la ecuación de Newton es reescrita como:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \dfrac{\vec{p}}{m} \\ \dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla}U \end{cases}$$

Desglosando esta ecuación en las componentes de los vectores, obtenemos

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \dfrac{p_i}{m} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial U}{\partial x_i} \end{cases}$$

que es una ecuación hamiltoniana en las coordenadas $(p_1, p_2, \ldots, p_n, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con hamiltoniano igual $H = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2m} + U = \sum_{i=1}^{n} \frac{m\dot{x}_i^2}{2} + U$ y el lector reconocerá que H es la suma de la energía cinética y la energía potencial, es decir, la energía del sistema.

II.1 Nuestros ejemplos

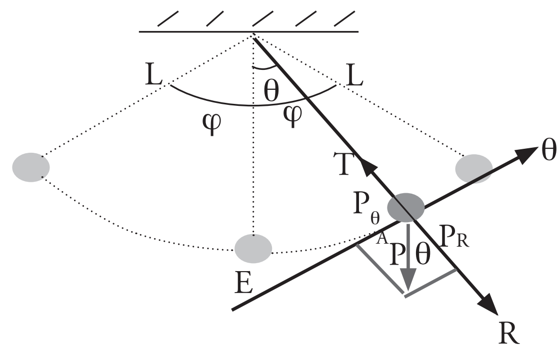
A continuación, se analizan dos ejemplos clásicos de la Mecánica según los distintos enfoques.

Ejemplo 1: Péndulo simple

Consideremos una partícula de masa m fijada a una cuerda de longitud pequeña L y sometida a la acción de la gravedad. Se supone que la partícula realiza oscilaciones de ángulo pequeño φ contenidas en un plano.

 ISSN: 1856-9587

El ángulo φ determina la posición de la partícula y será nuestra coordenada de posición generalizada. El sistema coordenado utilizado es de coordenadas polares[4].



Según Newton:

La partícula se mueve sobre un arco de circunferencia dado por $s = \theta L$ bajo la acción de dos fuerzas: PESO Y TENSIÓN.

Descomponiendo las fuerzas, por la segunda Ley de Newton tenemos que:

$$F_t = -P_\theta = m\ddot{s} \quad (2)$$

Donde $\ddot{s}$ es la aceleración tangencial.

$$\text{Pero:} \quad P_\theta = P\sin\theta \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2):

$$-P\sin\theta = m\ddot{s} = -mg\sin\theta \qquad (4)$$

Pero:

$$\ddot{s} = L\ddot{\theta} \qquad (5)$$

Donde $\ddot{\theta}$ es la aceleración angular. Sustituyendo (5) en (4):

$$-mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$$

4 No debe imaginar que las coordenadas de posición y momento generalizados representan coordenadas o velocidades usuales, de aquí deriva parte de la utilidad del enfoque hamiltoniano.

Simplificando la masa:

$$L\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \qquad (6)$$

Esta ecuación diferencial no corresponde a la ecuación de una partícula que se mueve con M.A.S., la ecuación de un movimiento armónico simple es:

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ con "ω" siendo constante y representa la frecuencia angular. Para valores pequeños de θ, sin $\theta \cong \theta$, por lo tanto la ecuación (5) se transforma en:

$\ddot{\theta} + \frac{g\theta}{L} = 0$, que si es la ecuación de un Movimiento Armónico Simple.

Según Lagrange:

Para aplicar la mecánica de Lagrange debemos escoger una variable con la cual quede completamente determinada la posición de la partícula, en este caso se escoge "θ" como dicha coordenada, entonces calculando la energía potencial:

$$U = mgh = mgl(1 - \cos\theta)$$

La cual para pequeños ángulos de desplazamiento, se puede aproximar por la ecuación:

$$U = \frac{1}{2} mgl\theta^2$$

Calculando la energía cinética:

$$K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\dot{\theta}^2 l^2$$

Con lo cual, el lagrangiano resulta:

$$L = \frac{1}{2} m\dot{\theta}^2 l^2 - \frac{1}{2} mgl\theta^2$$

Aplicando la ecuación de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\theta \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}$$

 ISSN: 1856-9587

Finalmente, se obtiene que:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Según Hamilton:

Usando los conceptos de energía cinética K y potencial T, se escribe que: $H=K+T$, donde: $K = \frac{p^2}{2m}$ con $p=mv$ y $T=mgL(1\text{-}cos\,\varphi)$. Así, $H(p,\varphi) = \frac{p^2}{2m} + mgL(1-\cos\varphi)$. Las ecuaciones de Hamilton, para el péndulo, son:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{p}{m} & (7) \\ \dot{p} = mgL(-\sin\varphi) & (8) \end{cases}$$

Luego, derivando la ecuación (7) y sustituyendo el resultado en la ecuación (8), se obtiene que:

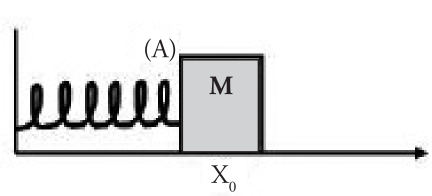
$$\ddot{\varphi} = gL(-\sin\varphi)$$

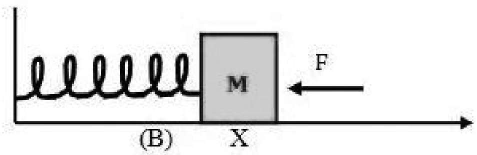
La cual reescribiéndola se obtiene que: $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$

Esto concluye el primer ejemplo.

Ejemplo 2: El oscilador armónico

Recordemos que una partícula de masa m sometida a la acción de un resorte, con elongaciones moderadas x, obedece a la ley de Hooke: $F = -K(x\text{-}x_0)$ con $x_0=0$





Según Newton:

Según la Ley de Hooke, sabemos que:

$$F = -Kx(t) \quad (9)$$

Donde *F* es la Fuerza recuperadora, *K* la constante de elongación del resorte, y *x(t)* la elongación.

En la figura (A), la masa M se encuentra en la posición de equilibrio, teniendo el resorte su longitud normal. Si aplicamos una fuerza externa, figura (B), hasta una elongación x , y luego lo soltamos, el cuerpo empezará a moverse con M.A.S., oscilando en torno a la posición de equilibrio.

En el instante inicial, la fuerza que ejerce el resorte es igual y opuesta a la fuerza externa aplicada.

A través de la segunda Ley de Newton, podemos relacionar la fuerza recuperadora *F*, con la aceleración *a(t)*, que es $\ddot{x}$, por tanto:

$$F = m\ddot{x} \quad (10)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2), obtenemos:

$$-Kx = m\ddot{x} \quad (11)$$

Donde:

$$\ddot{x} = -\frac{K}{m}x \quad (12)$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \quad (13)$$

Observemos que la ecuación (13) es la ecuación del M.A.S.

Si, $\frac{K}{m} = w^2$, siendo w la frecuencia angular o pulsación natural de oscilación del resorte, pero a su vez, $w = \frac{2\pi}{T}$, se obtiene que: $\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{2\pi}{T}$, lo que al despejar T resulta: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$, que es el período de oscilación del sistema masa-resorte.

Según Lagrange:

En este caso, la variable más idónea para la descripción de la posición es x, así que la energía potencial es:

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

La energía cinética viene dada por:

$$k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Por lo tanto, el Lagrangiano viene dado por:

$$L = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Entonces aplicando la ecuación de Langrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x})$$

Con lo cual obtenemos:

$$-kx = m\ddot{x}$$

Según Hamilton:

Observemos que por la segunda ley de Newton tenemos $m\ddot{x} = -kx$ y esto equivale a considerar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\frac{k}{m}q \end{cases}$$

donde $q=x$. Luego si definimos, $H(p,q)=\frac{1}{2}p^2+\frac{k}{m}q^2$ obtenemos que la evolución de una partícula sometida a la acción de un resorte puede ser escrita de manera hamiltoniana.

III ¿Por qué un curso de mecánica newtoniana, lagrangiana y hamiltoniana?

Es indudable que dentro de las grandes obras que ha realizado la humanidad por entender el mundo real, se encuentra la Teoría de Movimiento y de Gravitación de Sir Isaac Newton. La época de Newton fue una era de Revolución, existía todavía el predominio de la iglesia y prevalecían las ideas de Aristóteles acerca del movimiento de los cuerpos, aunque Galileo las había cuestionado seriamente. Cuentan que un día Newton, a sus 21 años de edad, se sentó a la sombra de un manzano, pasó allí horas y horas pensando en el gran mecanismo que hacía que los planetas ocuparan la posición que ocupan, en el por qué los cometas tenían esas órbitas,… repentinamente cayó una manzana sobre su cabeza y ¡Pum!, como arte de magia se le ocurrió la idea. Una idea basada en dos actores principales: Causa y Efecto, que en la Teoría de Newton fueron llamados "fuerza" y "aceleración", éstas están ligadas mediante una ecuación matemática denominada "2da. Ley de Newton". No es nuestra intención explicar con detalle las leyes del movimiento, pero sí podemos decir que para el siglo XVII grandes filósofos y físicos de la época quedaron maravillados con esta teoría, tuvo un auge enorme y el nombre de Newton comenzó a tener cada vez mayor respeto y crédito. Y no es para menos, la teoría predecía por un lado las leyes de Kepler del movimiento planetario, así los astrónomos tuvieron en su poder una gran herramienta para la predicción de eclipses y movimientos satelitales y planetarios, de hecho, gracias a esta teoría se descubrieron los planetas Plutón y Neptuno. Por otro lado, la teoría de movimiento de Newton predecía la velocidad del sonido, lo que le daba aún más credibilidad.

Sin embargo, la teoría de Newton requiere de una herramienta matemática llamada vector, la cual da la percepción de las fuerzas actuantes en el sistema y tiene la información geométrica de las "causas". Estas suelen representarse en un diagrama que se denomina: Diagrama de Cuerpo Libre (DCL) en el que se "descomponen" los vectores "fuerza" y se aplican las leyes de Newton, por supuesto con las restricciones como la de estar en un sistema inercial. Cuando los sistemas físicos se complican y existen otras limitantes, la teoría de Newton se vuelve un tanto tediosa para dar solución a ellos.

Muchos años después de Newton, el matemático Lagrange ideó una Teoría de movimiento meramente analítica y basada en el cálculo de variaciones previamente estudiado por Euler. Lagrange logró construir una ecuación que es propia de cada sistema físico. No es una teoría de causa-efecto de Newton pero se puede demostrar que es una teoría equivalente a la de Newton pero con la particularidad que es muy efectiva para esos sistemas complicados que anteriormente mencionábamos, no se necesita tener una idea gráfica del sistema y por lo tanto no usa el (DCL), pero a cambio de eso, se necesitaba conocer el cálculo de variaciones.

Posteriormente, Hamilton logró establecer una nueva visión de la física, con un enfoque más abstracto de los sistemas físicos y de mayor alcance que la propia teoría de Newton, de hecho, lo que llamamos el “Hamiltoniano” es una idea aplicable en la mecánica cuántica, física que hasta los momentos es el primer eslabón de todas las demás ramas de la física.

En definitiva, la física con sus leyes se puede comprender de varias formas que son absolutamente equivalentes, una es por leyes de movimiento con las Leyes de Newton, otra forma es por principios minimales (Teorema de Maupertuis y de Fermat) como la teoría de Lagrange, y otra por teoría de potenciales como el principio de Hamilton.

En el siguiente cuadro se observan algunas semejanzas y diferencias entre los tres enfoques de la mecánica:

	NEWTON	LAGRANGE	HAMILTON
Matemática utilizada	Ecuaciones Diferenciales	Cálculo de variaciones	Sistema de Ecuaciones Diferenciales
Visión de la descripción de la naturaleza	Geométrica	Analítica	Analítica

Limitaciones	• No describe el mundo microscópico • Falla para altas velocidades (cercanas a la de la luz)	No posee limitaciones para describir el mundo microscópico ni la Relatividad Especial	No posee limitaciones para describir el mundo microscópico ni la Relatividad Especial
Ideas en la que hacen hincapié	Causa y Efecto	Principio de Mínima Acción	Cantidades Conservadas
Ecuaciones de Movimiento	El tiempo aparece explícitamente en ellas	El tiempo no aparece explícitamente en ellas	El tiempo no aparece explícitamente en ellas
¿Para qué tipo de problemas son más apropiados cada uno de los enfoques?	• Problemas donde el tiempo sea una incógnita	• Problemas donde los diagramas de cuerpo libre (DCL) sean muy complejos • Problemas en los que se pueda visualizar la acción	• Problemas donde los diagramas de cuerpo libre (DCL) sean muy complejos • Problemas donde se usen coordenadas generalizadas • Problemas que se pueden estudiar con Leyes de Conservación

En conclusión, se puede decir que dotar a un estudiante de conocimientos basados en otros enfoques de la Mecánica, lo capacita para:

a) Poseer una visión más completa y general de la Mecánica.

b) Contar con diferentes herramientas para la resolución de problemas de Mecánica.

c) Conocer principios de la mecánica, extensibles a otras ramas de la Física como es la Mecánica Cuántica.

Por estas razones, se presenta a continuación, una propuesta de un curso de Mecánica.

IV. Propuesta de un curso de mecánica:

Fundamentación del curso

Se considera importante introducir en el moderno currículo de Física las ideas de Hamilton y Lagrange (Euler) que permiten obtener una visión unificada de la Mecánica. Además, las ideas propuestas por Newton de fuerza y leyes del movimiento son presentadas como consecuencias del enfoque de Lagrange y Hamilton, logrando que el estudiante disponga de distintas opciones para resolver un problema mecánico.

Las teorías expuestas son desarrolladas usando el Cálculo Diferencial e Integral evitando las complicaciones del Cálculo de Variaciones, manteniendo los mismos requisitos matemáticos que en los cursos de Mecánica dictados en pregrado en las facultades de Ciencia e Ingeniería.

Sinopsis de contenido

Tema 1

Breve historia de la Física. Las ideas que subyacen en la formulación de Newton: Causa-Efecto ⇔ Fuerza-Movimiento. Descripción de un sistema a partir de las leyes de Newton. Ejemplos de aplicación de las Leyes de Newton. Movimiento Planetario. Fuerzas a distancia. Concepto de Campo. Limitaciones de la Mecánica Newtoniana: Mecánica Cuántica.

Tema 2

Breve resumen histórico del trabajo de Fermat, Euler y Lagrange. Principio de Maupertuis. Concepto de Funcional. Teoremas de Simetría. Trabajo y Energía. Definición del Lagrangiano y ejemplos. Principio de Mínima Acción y experiencias demostrativas. Determinación de la trayectoria a partir del Principio de Mínima Acción y sus aplicaciones. Leyes de Newton deducidas a partir del Principio de Mínima Acción. Leyes de Conservación y el Principio de Mínima Acción. Ejemplos y problemas.

Tema 3

Breve resumen histórico del trabajo de Hamilton. Concepto de coordenadas generalizadas. Ecuaciones de Hamilton. Conservación del Hamiltoniano en una trayectoria. Ejemplos y problemas de aplicación. Concepto de transformación canónica. Variables de acción-ángulo. Problemas y aplicaciones. Deducción de las leyes de Newton a partir de las ecuaciones de Hamilton.

Bibliografía

Ruggeri, G.(1984). Mecánica. Caracas: Ediciones de la Universidad Nacional Abierta.

Goldstein, H.(1986). Classical Mechanics. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Co.

Competencias

En la actualidad, la tendencia más utilizada para la elaboración de programas curriculares emplea los llamados perfiles por competencias. Las competencias son el conjunto de saberes, capacidades y disposiciones que hacen posible actuar e interactuar de manera significativa en situaciones en las cuales se requiere producir, apropiar o aplicar comprensiva y responsablemente los conocimientos sistematizados.

A continuación, se presenta la competencia profesional que se pretende desarrollar en estudiantes y docentes a través del curso de Mecánica para pregrado basado en los conceptos de Energía y del Principio de Mínima Acción. Dicha competencia está desglosada en unidades de competencia y en criterios de desempeño.

Las unidades de competencia se identifican para darle significado operativo a la competencia, teniendo un alcance más reducido. Su enunciado proviene del desempeño observado en la competencia profesional respectiva.

Criterios de desempeño estipulan la certificación de dominio del estudiante en su vía hacia el desarrollo de la competencia. Son indicios de cómo va progresando el estudiante, y son expresadas en el conocer, el hacer, el ser y el convivir.

 ISSN: 1856-9587

Competencia profesional:

Posee una visión unificada de la Mecánica que incorpora los paradigmas propuestos por Newton, Hamilton y Lagrange, para que de forma autónoma, innovadora y novedosa, sea capaz de aplicarlos en la resolución de problemas.

UNIDAD DE COMPETENCIA	DEFINICIÓN DE LA UNIDAD DE COMPETENCIA	CRITERIOS DE DESEMPEÑO
Comprende de forma crítica y analítica los fundamentos de la Mecánica Clásica	◦ Identifica los fundamentos de la Mecánica Clásica ◦ Manifiesta una actitud analítica, crítica y de síntesis ante planteamientos de la Mecánica ◦ Comprende y describe los principios básicos de la Mecánica Clásica: Enfoque Newtoniano, Lagrangiano y Hamiltoniano.	◦ Define y comprende conceptos como: Inercia, masa, fuerza, acción, posición, velocidad, aceleración, energía, momento lineal y momento angular ◦ Comprende las ideas que subyacen en la formulación de las teorías de Newton, Lagrange y Hamilton ◦ Utiliza diferentes sistemas coordenados ◦ Describe sistemas a partir de Leyes ◦ Relaciona los enfoques de la Mecánica Clásica ◦ Comprende y explica los problemas que derivan de las formulaciones de la Mecánica Clásica ◦ Comprende la idea de Simetría
Demuestra capacidad de auto-aprendizaje, desarrollo creativo, y actitud constructiva ante la Física	◦ Cuestiona los procedimientos para fundamentar las bases teóricas de la Mecánica ◦ Manifiesta una actitud de asombro frente a otros planteamientos de la Mecánica	◦ Reconoce sus propios prejuicios y modifica sus puntos de vista cuando conoce nuevas evidencias. ◦ Considera los puntos de vista de otras personas de una manera reflexiva, valorando la importancia de intercambiar opiniones respecto a conceptos y explicaciones de las teorías de la Mecánica Clásica

UNIDAD DE COMPETENCIA	DEFINICIÓN DE LA UNIDAD DE COMPETENCIA	CRITERIOS DE DESEMPEÑO
Relaciona la Física con otras áreas del saber, de la tecnología y la sociedad	Establece la interrelación entre Ciencia, Tecnología, ambiente, y sociedad, en contextos históricos y sociales específicos	• Utiliza la Matemática como un lenguaje para expresar fenómenos naturales • Utiliza las tecnologías de información y comunicación para procesar e interpretar información • Reconoce las relaciones del desarrollo de la Física con otras áreas del saber • Relata momentos de gran trascendencia en la historia del desarrollo de la Mecánica Clásica
Presenta resultados ajustados a las teorías demostradas	Sistematiza y comunica los resultados de las teorías demostradas y presenta nuevas formas didácticas de entender la Mecánica Clásica	• Obtiene, registra y sistematiza la información para responder preguntas científicas, consultando bibliografía y realizando demostraciones • Contrasta los resultados obtenidos en las demostraciones, con teorías previas, y comunica sus conclusiones y aportes didácticos
Aplica la Mecánica en la resolución de problemas	Resuelve problemas de Mecánica Clásica utilizando las teorías de Newton, Hamilton y Lagrange	Utiliza el enfoque Newtoniano, Lagrangiano y Hamiltoniano en la resolución de problemas de la Mecánica Clásica

Bibliografía

Feynman, R., Leighton, R., Sans, M. (1961).Lectures on Physics. Vol. II. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Co.

Hanc, J.,Taylor, E. (April, 2004). From Conservation of Energy to the principle of least action: A story line. *American Journal of Physics*. 72 (4), 514 – 521.

Hanc, J., Taylor, E., Tuleja, S. (April, 2004). Deriving Lagrange´s equations using elementary calculus. *American Journal of Physics*, 72 (4), 510- 513.

Hanc, J., Hancova, M, Tuleja, S. (April, 2004). Symmetries and conservation laws: Consequences of Noether's Theorem. *American Journal of Physics*, 72 (4), 428 – 435.

Neuenschwander, D. Taylor, E., Tuleja, S. (2006). *Action: forcing energy to predict motion*. The Physics Teacher, 44, 146 – 152.

Norbury, J. (1996). Lagrangians and Hamiltonians for High School Students, 64(2), American Journal of Physics, 64 (2), 19.

Ogborn, J., Hanc, J., Taylor, E., (2006). *Action on stage: a historical introduction*. The Girep Conference.

Ruggeri, G.(1984). Mecánica. Caracas: Ediciones de la Universidad Nacional Abierta.

Smale, S., Hirsh, M. (1974). *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. San Diego: Academic Press.

EXPERIENCIAS
DOCENTES

Alejandro del Mar
Joserine Abreu R.

Inter-escolar de robótica educativa: una manera diferente de aprender