Jesús F. Baceta V.

Cardinalidad y la construcción genética de los números naturales según Russell

RESUMEN

En esta nota se recrea la construcción de los números naturales según Bertrand Russell; es una hermosa construcción que puede ser explicada desde el punto de vista genético y que permite una ponderación , no menos bella, sobre el enfoque que sostiene que la matemática puede ser reducida a la lógica. La nota es de carácter didáctico y caracteriza los presupuestos metafísicos del logicismo de Russell.

Palabras claves: Cardinalidad, ontología, logicismo

***

ABSTRACT

In this paper the construction of the natural numbers have been recreated according to Bertrand Russell. It is a beautiful construction, which can be explained from the genetic point of view that allows an estimation, no less beautiful, about the approach that sustaines that mathematics can be reduced to logic. This paper has a didactic character and characterizes the metaphysical suppossition of the logicism of Russell.

Key words: Cardinality, ontology, logicism.

***

La noción de cardinalidad se puede explicar fácilmente mediante un sencillo ejemplo. Si en un aula *todos* los alumnos están sentados en su pupitre y no sobran ni faltan pupitres, los conjuntos de alumnos y pupitres tienen la misma cantidad de elementos, no sabemos cuántos, pero seguro que tienen la misma cardinalidad. Por eso dice Russell:

"Dos clases tienen el mismo número cuando, y solo cuando, existe una relación uno a uno cuyo dominio incluye a la primera clase, y que es tal que la clase de los correlacionados de los términos de la primera clase es idéntica con la otra clase.[1]"

Lo cual define la *Cardinalidad*: Dos conjuntos X e Y tienen *la misma cantidad de elementos* (*cardinalidad*) si existe una función biyectiva f entre ellos.

¿Qué tienen en común José Ortega y Gasset, Bolívar y usted?; y ¿el gordo y el flaco, Abbott y Costello, Hansel y Gretel, mi par de piernas, los hermanos Grimm, Batman y Robin, Mortadelo y Filemón con Romeo y Julieta? ¿En que sentido son iguales los tres tristes tigres, las tres gracias, los tres cochinitos, las tres leyes de la mecánica de Newton, los tres chiflados y los tres reyes magos? y ¿los cuatro puntos cardinales con los cuatro evangelios? ¿Qué nos permite comparar al conjunto de los dedos de mi mano derecha, a la cual ni le sobran ni le faltan dedos, con los postulados de la geometría de Euclides y el conjunto de los vértices de un pentágono? y ¿las seis puntas de la estrella de David

1 RUSSELL, B. *Los principios de la matemática* (Traducido por J. C. Grimberg, 1967). Espasa Calpe, Madrid, 1903, p. 113.

con un hexágono? ¿Los siete enanos, las siete plagas, los días de la semana y los siete pecados capitales? ¿Los diez mandamientos y las diez jornadas y diez narraciones del Decamerón? y ¿los doce apóstoles, las doce campanadas de fin de año, los doce meses y las doce uvas del tiempo?

Sin duda alguna que tienen la misma *cantidad* o el mismo *número* de elementos. Lo que define un número es una clase de conjuntos equivalentes (generados por la relación de equivalencia "tener la misma cantidad de elementos"). No es el número mismo el que da origen a los conjuntos. La noción de función es anterior a la de número. No se necesita contar si los pupitres de un salón corresponden al mismo número de alumnos; basta con pedirles a los alumnos que se sienten.

Los números naturales pueden ser definidos mediante una serie de sucesiones a partir de un elemento inicial. Una vez que tenemos el primer elemento (generalmente denominado por '0') necesitamos una forma de "incrementar uno" a ese elemento. De esta manera, el 1 será "incrementar uno" al 0, el 2 será "incrementar uno" al 1, etc.

Pero, ¿cómo definimos el primer elemento que genera las sucesiones? ¿Cómo definimos el 0? Veamos qué nos sugiere nuestra larga pregunta retórica: los tres tristes tigres, las tres gracias, los tres cochinitos, las tres leyes de la mecánica de Newton, los tres chiflados y los tres reyes magos son todos conjuntos con tres elementos:

3 ={{Fe, Esperanza, Caridad}, {Curly, Larry, Moe}, {Gaspar, Melchor, Baltasar},...}
= $\{\{X\} \mid \{X\}$ biyectable con $\{a, b, c\}\}$
= $\{X_{\{a, b, c\}}\}_{\{a, b, c\} \in 3}$

Es decir, la familia de conjuntos de todos los conjuntos con tres elementos:

$$\{X_{\{a, b, c\}}\}_{\{a, b, c\} \in 3}$$

Y de ahí que exista entre ellos y el conjunto $\{a, b, c\}$ una función biyectiva y una relación de equivalencia η_1 (tener el mismo número de elementos) que genera a los conjuntos de la partición:

$$X_{\{a, b, c\}} = \{x \mid \eta_1 \{a, b, c\} x\}$$

El conjunto de tres elementos puede ser cualquiera, no necesariamente {*a*, *b*, *c*}, podríamos haber elegido a {Curly, Larry, Moe}:

$$X_{\{\text{Curly, Larry, Moe}\}} = \{x \mid \eta_1\{\text{Curly, Larry, Moe}\}x\}$$

Similarmente con dos:

$$\begin{aligned} 2 &= \{\{\text{el gordo y el flaco}\}, \{\text{Abbott y Costello}\}, \{\text{Hansel y Gretel}\}, \\ &\quad \{\text{Batman y Robin}\}, \{\text{Mortadelo y Filemón}\}, \ldots\} \\ &= \{\{X\} \mid \{X\} \text{ tiene 2 elementos}\} = \{X_{\{a,\,b\}}\}_{\{a,\,b\}\in 2} \end{aligned}$$

Familia de conjuntos de todos los conjuntos con dos elementos.

$$\{X_{\{a,\,b\}}\}_{\{a,\,b\}\in 2}$$

Clase de equivalencia, por ejemplo:

$$X_{\{a,\,b\}} = \{x \mid \eta_1\{a, b\}x\}$$

Similarmente con uno. Familia de conjuntos de todos los conjuntos con un elemento.

$$\{X_{\{a\}}\}_{\{a\}\in 1}$$

Clase de equivalencia, por ejemplo:

$$X_{\{a\}} = \{x \mid \eta_1\{a\}x\}$$

La gran pregunta: ¿Qué pasa con la clave de todos los conjuntos con ningún elemento? Notemos que hay muchos representantes de esa clase:

$$\begin{aligned} 0 &= \{\{x \mid x \text{ es una oración verdadera y falsa a la vez}\} \\ &= \perp, \{x \mid x \text{ es un ser humano que no lo es}\} \\ &= \perp, \{x \mid x \text{ un es círculo redondo}\} \\ &= \perp, \{x \mid x + x = x \text{ y } x \neq 0\} = \perp, \ldots\} \\ &= \{\{X\} \mid \{X\} \text{ tiene 0 elementos}\} = \{X_\perp\}_{\perp\in 0} = \{\perp\} \end{aligned}$$

Los conjuntos de {Curly, Larry, Moe} y {Fe, Esperanza, Caridad} tienen la misma cantidad de elementos pero su referencia es distinta. Pero, cuando un conjunto es vacío simplemente no refiere y, así, todos los conjuntos vacíos tienen la misma cantidad de elementos, ninguno, y la misma referencia, nada. Así el 0 es igual a la clase $\{\perp\}$. ¡Ya tenemos un primer elemento!:

$$0 = \{\perp\}.$$

Ya podemos generar a todos los números e "incrementar uno":

$0 = \{\perp\}$	De nonada crió Dios el mundo (Hugo Celso)
$1 = \{\{\perp\}\} = \{0\}$	que tiene un elemento.
$2 = \{\{\perp\}, \{\{\perp\}\}\} = \{0, 1\}$	que tiene dos elementos.
$3 = \{\{\perp\}, \{\{\perp\}\}, \{\{\perp\}, \{\{\perp\}\}\}\} = \{0, 1, 2\}$	que tiene tres elementos.

Cada conjunto se forma tomando a los anteriores conjuntos como elementos.

Dijo Russell: "En resumen: Matemáticamente, un número no es otra cosa que una clase de clases semejantes: esta definición nos permite la deducción de todas las propiedades usuales de los números, ya sean finitos o infinitos, y es la única que es posible (hasta donde conozco) expresar en términos de los conceptos fundamentales de la lógica general"[2].

La noción de función es anterior a la de número y la de conjunto a la de función. De ahí que Frege y Russell creyeran que se derivaba toda la matemática de la lógica. Una vez que se tienen los números naturales, se construyen los enteros y, de éstos, los racionales; luego, los reales, los complejos, etc., según los procedimientos canónicos de los libros de álgebra moderna.

Russell y Whitehead usaron en *Principia* el prefijo de existencia '∃' y de generalización '∀' aplicado, no sólo a variables de individuos, sino también a predicados. Por ejemplo, '$(\exists P)(\forall x)\, Px$' y tal oración se lee: «Existe un *atributo o propiedad* P tal que, no importa lo que x pueda ser, x tiene el atributo o propiedad P». Por lo que la cuantificación sobre predicados representaba a los atributos o propiedades. Así,

2 RUSSELL, B. Op. Cit, p. 116.

"sustituían" 'P' por el atributo de *ser par* o *paridad*, o por el atributo de *ser rojo* o *rojez*, o por la propiedad de *ser divisible* o *divisibilidad*. Esto producía una sutil confusión que consistía en que parecía natural que la oración abierta '*x* es sabio' se leyera como '*x* tiene la propiedad de ser sabio', lo cual produjo una sistemática ambigüedad en el uso de la expresión 'función proposicional': unas veces la usaron para referirse a predicados (*sabio*: como una referencia abreviada de un término para todas y cada una de las personas sabias), otras, para referirse a atributos (*la propiedad de ser sabio o sabiduría*: una entidad abstracta universal de la cual participan todas las personas sabias). A partir de lo anterior, Russell sugirió a una teoría del conocimiento que distingue entre *conocimiento directo y conocimiento por descripción*. Tenemos conocimiento directo, según Russell, de los universales o propiedades (azul, rojo, diferente de, etc.) y de los datos sensoriales (el azul de esta camisa, el rojo de tal otra, etc.).

Dada la ambigüedad en el uso de la expresión 'función proposicional', unas veces como predicado y otras como propiedad, algunos sostuvieron que los predicados tienen como intensión a los atributos, y como extensión a los conjuntos, y, a partir de esto muchos creyeron, incluyendo a los propios Russell y Whitehead, que habían derivado la teoría de conjuntos de la lógica. Pero, como los conjuntos no son predicados y no se reducen a ellos, Russell y Whitehead no lograron demostrar la tesis logicista.

Gödel compartía la tesis metafísica de Russell; escribió refiriéndose a la obra lógico-matemática de Russell:

"Me parece que la suposición de tales objetos [clases y conceptos como objetos reales] es tan legítima como la suposición de los cuerpos físicos (...). Ellos son en el mismo sentido necesarios para obtener un sistema satisfactorio de las matemáticas como los cuerpos físicos son necesarios para una teoría satisfactoria de nuestras percepciones sensoriales, y en ambos casos es imposible interpretar las proposiciones que uno quiere aseverar acerca de estas entidades como proposiciones acerca de los *datos*[3]."

Russell y Gödel eran realistas matemáticos. Insistían en la existencia de las clases de manera independiente del sujeto cognoscente. Su

3 GÖDEL, K. *Obras completas* (Traducido por Jesús Mosterín, 1989). Alianza, Madrid, 1929-1936, p. 128.

justificación es un criterio de necesidad matemática: tienen que existir las entidades que son *indispensables* para las teorías que han mostrado tener éxito. Los números y, por lo tanto, las clases existen porque refieren a los objetos de un determinado universo del discurso, según un particular marco lingüístico o teoría, y porque, además, son indispensables para el desarrollo de la matemática y la física. Hay que tener un compromiso ontológico con ellos. Esta tesis ontológica también la sostienen, en algún momento, Quine y Putnam[4].

La teoría de conjuntos puede ser entendida como una *lógica extendida* mediante la relación de '∈', decía Quine en *Mathematical Logic*: la teoría de conjuntos es la lógica de '∈'. Así lo entendió Russell al declarar la reducción de la matemática a la lógica, aunque sin notar que lo que había declarado era la reducción de la matemática a la teoría de conjuntos. Si por *lógica* se entiende una *lógica extendida* mediante la lógica de '∈', entonces Russell sí llevó a cabo su promesa de reducir la matemática a la lógica; esto es lo que muestra la génesis de la construcción de los números naturales de Russell. En este sentido, el resto de la discusión es una cuestión terminológica; una elección de palabras.

Bibliografía

Gödel, K. (1929-1936). *Obras completas* (Traducido por Jesús Mosterín, 1989). Madrid: Alianza.

Mueller A. y A. Fine (2005). "Realism, Beyond Miracles" (pp. 83-124) en Ben-Menahem, Y. (ed.) (2005). *Hilary Putnam: Contemporary Philosophy in Focus*. Cambridge: Cambridge University Press.

Quine, W. V. O. (1951). *Mathematical Logic*. Cambridge: Harvard University. Press.

Russell, B. (1903). *Los principios de la matemática* (Traducido por J. C. Grimberg, 1967). Madrid: Espasa Calpe.

4 Vid. MULLER A. y A. FINE. "Realism, Beyond Miracles" en Ben-Menahem, Y. (ed.). *Hilary Putnam: Contemporary Philosophy in Focus.* Cambridge University Press, Cambridge, 2005, pp. 83-124.